



LÍNEAS DE ROTURA

PRÓLOGO

El nombre de este método de cálculo, corresponde al título de la tesis que presenta K.W. Johansen en 1943, (Brudlinieteorie), formulando la aplicación del método plástico a elementos superficiales como losas o placas. Con ello se cierra el conjunto, que contaba ya con el análisis límite, aplicado a volúmenes como el terreno, o el método de rótulas plásticas, aplicado a pórticos o soluciones con barras, y que podría entenderse completado con el de trayectoria de cargas, en soluciones de fábrica de piedra o ladrillo.

Tras la publicación de la tesis, el método de líneas de rotura fue durante algún tiempo casi la única posibilidad práctica para proyectar losas. Pero con este método todo lo que deduces de cada cálculo es que, como mucho, la losa es capaz de aguantar lo obtenido. Más, seguro que no. Menos, no se puede saber. Parecía, y es, perfecto para peritar y deducir la inviabilidad de algo. Pero para proyectar necesitaba o muchos cálculos, (y aun por muchos que fueran, quedaba siempre pendiente demostrar que no existía otro que concluyera un valor inferior) o una solución de "idea feliz", o restringir el campo a casos ya explorados concienzudamente por autoridades en la materia, como pasó con lo de los terrenos. En conjunto el método resultaba algo insatisfactorio.

De todas maneras, otros métodos alternativos, como el de "bandas" o "tiras", descomponiendo el problema en vigas cruzadas, aunque era seguro para proyecto, sólo era fácil de formular para casos canónicos, y no valía en absoluto para peritar, por lo que aún resultaba menos satisfactorio.

La aparición de los ordenadores, y, sobre todo, la programación de los planteamientos matriciales, que parecían de aplicación genérica a todo tipo de problemas, hizo concebir la esperanza de que el problema de proyecto de las losas podía solucionarse mejor y en breve.

No ha sido así. Al día de hoy, todo lo que se ha conseguido programar es un análisis lineal, completamente insuficiente. Como es sabido, de los resultados del análisis sólo tienen valor los que correspondan a una situación última, tras las no linealidades y plastificaciones que puedan necesitarse para ello, que es con lo que se "borran" las imperfecciones o condiciones iniciales desconocibles, propias de los sistemas hiperestáticos, que en losas son necesariamente todos. En acero el análisis lineal no puede llegar a la carga última. En hormigón armado tampoco. Ni siquiera se ha llegado a establecer qué sería, en losas, "redistribuir" ni cómo podrían compensarse solicitaciones de una dirección con otra, o de unos puntos con otros. La solución final, sobre plano, suele ser muy poco racional desde el punto de vista constructivo¹.

Con el paso del tiempo, ya hay suficiente experiencia de cómo abordar en muchos más casos el cálculo de losas por líneas de rotura sin los inconvenientes citados. Incluso cabe presentar un método sistemático de exploración de configuraciones de agotamiento, entre las que buscar metódica y rentablemente la pésima. Es por ello que actualmente se puede considerar como el método más eficaz para proyecto de losas y placas. Esperamos que este documento ayude a paliar la laguna que en torno a este tema presentan muchos currículos² y planes de estudio.

Pozuelo, 20 de noviembre del 2011

José L. de Miguel

¹ Las reglas para soluciones regulares que aparecen en la norma de hormigón española, relativas a fracción de armadura en cada zona, transcritas de la norma americana, provienen inequívocamente de la aplicación del método de líneas de rotura.

² Desde la primera edición hasta la última, en la publicación de "Hormigón Armado" de Montoya et al. se ha incluido sistemáticamente un capítulo, presentando el método de líneas de rotura para losas, incluyendo refinamientos, como el de "fuerzas nodales", que para la mayoría de los propósitos es información prescindible.

1. MÉTODOS PLÁSTICOS

1.1 Elementos de volumen

Los métodos plásticos se alinean más con el planteamiento de Galileo (1564-1642), interesado sobre todo en la determinación de la capacidad resistente, que con el de Mariotte (1620-1684), que buscaba la respuesta a cuál era la tensión de cada punto, aunque ninguno de los dos rebasó el nivel de sección.

Una de las primeras aportaciones que se inscribe en enfoque plástico puede ser la de Coulomb (1736-1806) en el asunto del empuje de los terrenos. Establece que el empuje tiene que proceder de una cuña. Para imponer el equilibrio de dicha cuña, usa la condición de que las reacciones deben proceder de una situación límite, por lo que corresponden a un estado de agotamiento o rotura (que antes había formulado que se podía expresar en términos de un *ángulo de rozamiento*). Dado que con cada ángulo de cuña obtiene un valor diferente, y como la naturaleza se rige por máximos, no tarda en descubrir que ese el valor que busca¹.

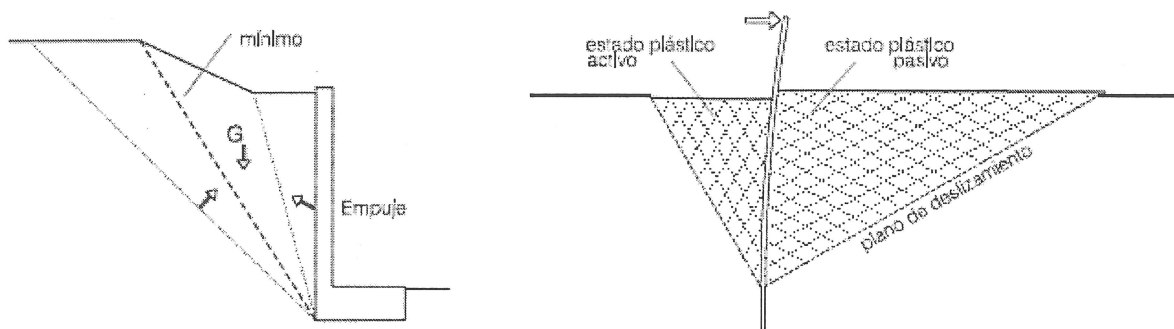


Figura 1. Empuje según Coulomb, y estados plásticos de Rankine

El problema lo retoma Rankine, (1820-1872) y aunque lo llega a formular sólo para un ámbito más reducido, su planteamiento plástico es más general y explícito. Enuncia que si en el terreno natural se dispone un plano vertical, al aplicar una fuerza horizontal, se reduce la presión horizontal del terreno de un lado, pero a partir del instante en que se alcanza el agotamiento por descompresión, dicha presión se estabiliza, y lo que sucede a continuación es un incremento incontrolado del movimiento. El terreno en esa situación se dice que se encuentra en "*estado plástico activo*" de Rankine. Igualmente, del lado contrario, aunque más tarde, se alcanza el "*estado plástico pasivo*" de Rankine. El empuje sobre un muro vertical sin rozamiento corresponde al equilibrio de una cuña en estado plástico activo, con un valor que, dado que el sistema mecánico es el mismo, coincide con el de Coulomb (figura 1).

Con estos antecedentes, Prandtl (1875-1953), desarrollando la teoría de la plasticidad, aborda el problema de la capacidad portante de la zapata, hasta entonces confiado a valores que la práctica consagraba como seguros, denominados de "*presión admisible del terreno*". Establece que, al cargar la zapata, se incrementan las tensiones en el terreno subyacente. Antes o después, en una dirección de algún punto se alcanza la rotura (con el criterio de Coulomb), pero mientras los demás no le dejen, su intento de deslizar indeterminadamente queda impedido. Sólo cuando hay suficientes puntos en ese estado, permitiendo un movimiento conjunto de un volumen de terreno, el movimiento indeterminado deviene en incontrolado, situación que se identifica con el agotamiento.

El problema era pues el de encontrar esa configuración de puntos. Hacerlo por análisis elástico, determinando el que primero alcanza la rotura, cambiando las ecuaciones de relación de su tensión a su deformación, hasta encontrar otro, y luego otro, hasta el agotamiento global, era (y probablemente, todavía es) inviable. Apostar directamente por una configuración de agotamiento, implicaba demostrar que ninguna otra conducía a un valor menor de capacidad² de carga. Dado que, en dos dimensiones, no

¹ La construcción geométrica de la solución del problema se debe a Cullman

² Terzaghi (1883-1963) llega a demostrar que, con empuje pasivo contra un muro, la configuración pésima no es un plano, dado que hay una mezcla de curva y recta que arroja un valor inferior. La formulación de CTE en este asunto sigue procediendo de considerar un plano.

hay más que unas pocas posibilidades de campos geométricos con estados plásticos, acabó por encontrar, no sin mucho esfuerzo e imaginación, la solución, eso sí, sólo para zapata aislada, en dos dimensiones y terreno libre horizontal¹ que conducía a la menor carga con la que se producía el agotamiento global (figura 2).

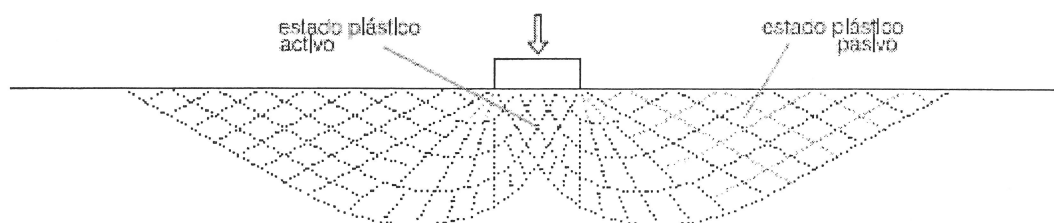


Figura 2. Configuración de rotura de terreno bajo zapata

1.2 Elementos lineales

En barras de material plástico, como son, en general, los perfiles de acero, cuando la sección llega a agotarse, puede girar más, pero no aumenta su sollicitación. Para esa sollicitación el giro es indeterminado, pero si las demás secciones siguen en régimen elástico, no es incontrolado. Se dice que se ha formado una *rótula plástica*. Como en los casos anteriores, mientras no haya un número suficiente de rótulas como para permitir un movimiento ilimitado, no hay agotamiento.

En comparación con el problema anterior, el del análisis por rótulas plásticas para pórticos resultó infinitamente más sencillo. Sea el caso (clásico) del pórtico de nudos rígidos de la figura 3. Está dimensionado, y la pregunta es cuál es la máxima carga, del tipo señalado, que es capaz de soportar. Un simple análisis cualitativo indica que las puntas de sollicitación sólo pueden presentarse en los cinco puntos señalados. Y dado que el agotamiento global implica cuatro rótulas², y el local del dintel, tres, hay un número exiguo de posibilidades de agotamiento: las combinaciones de cinco elementos tomados de cuatro en cuatro, que es igual a dejar uno fuera, o sea cinco.

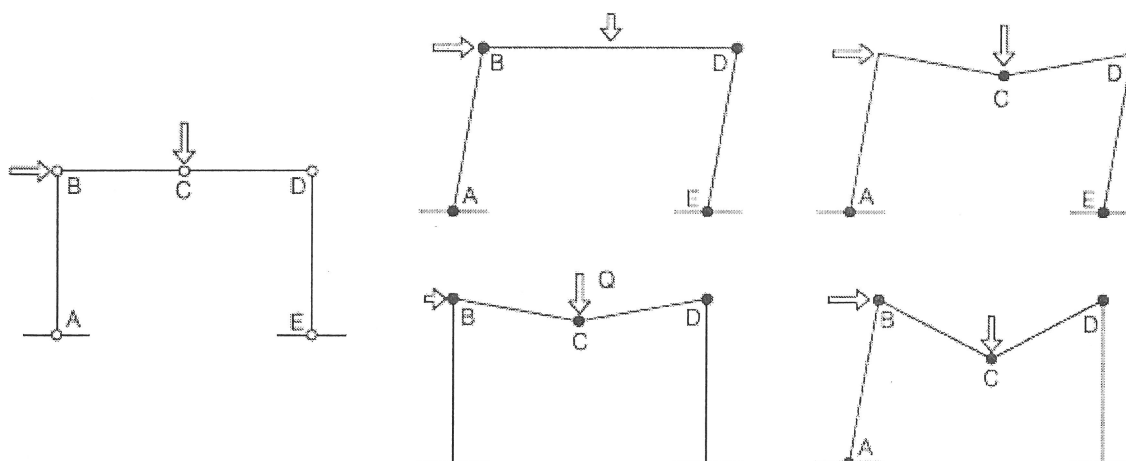


Figura 3. Configuraciones de rotura de pórtico simple

¹ Se conoce como expresión *trinómica*, ya que se refiere a un problema que se describe con sólo tres variables, y al ajustarla dimensionalmente se obtienen tres sumandos. Al día de hoy todavía no se ha conseguido resolver ningún otro caso. Aunque se conocen algunas variantes, procedentes de otros autores, la que se reproduce en la figura 2 es la más simple y clásica, suficiente para lo que aquí se pretende ilustrar.

² Con tres articulaciones sería una pieza isostática, un arco triarticulado. Una más y permite movimientos incontrolados. Se dice que ha pasado a *mecanismo*.

Explorarlas todas, una a una, no parece que sea una tarea inabordable. Algunas, como las de movimiento opuesto al sentido de las fuerzas, no representadas en la figura 3, pueden desestimarse de inmediato. La que necesite menos carga para romper es la que define el valor buscado.

Si la carga del dintel es repartida, (figura 4) aparece una pequeña complejidad adicional. La rótula central, C, en el punto del dintel sometido a momento flector máximo, no se sitúa en una posición definida de antemano. Es menester adoptar alguna estrategia complementaria, (como dibujar el diagrama de momentos) o algunos casos adicionales, para acorralar dónde se encuentra ese punto. Pero tampoco eso convierte al problema en inmanejable.

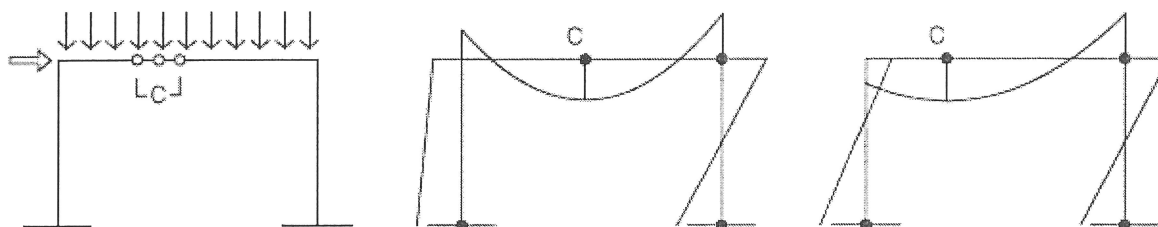


Figura 4. Pórtico con acción repartida

Si se trata de un pórtico múltiple, en tramos o alturas, el número de rótulas necesarias para alcanzar el agotamiento, y el número de posiciones posibles aumenta de modo similar, y en general, de manera repetitiva en altura, por lo que el problema de explorar todas las posibles combinaciones sigue siendo abarcable¹.

El enfoque anterior, de rótulas plásticas, corresponde al problema de peritar algo definido. El problema de proyecto, es decir el de determinar las dimensiones para poder soportar una carga dada, es aún más sencillo, si cabe. Basta decidir el valor de tantas solicitaciones como se necesite para que el resto estén obligadas por equilibrio, eso sí, con el compromiso de disponer luego, en cada sección la que sea capaz de resistirlas. De nuevo, al tratarse de elementos con un número discreto de incógnitas hiperestáticas, comparado con el puntos totales, y solicitaciones ligadas por reglas isostáticas, bien conocidas, el método es perfectamente viable.

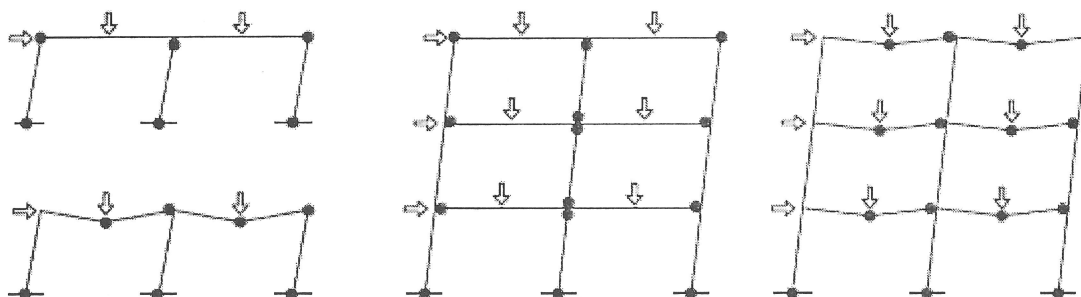


Figura 5. Pórticos múltiples

1.3 Elementos superficiales

El paso a elementos superficiales, como losas, significa un cambio cualitativo trascendental, y pone en crisis la posibilidad de aplicar a estos elementos los métodos de pórticos.

Incluso un elemento simple permite mostrar cómo varía el contexto. Sea el caso de la figura 6. Se trata de un emparrillado de cinco nervios en cada dirección, apoyados en los extremos, con carga vertical. Puede comprobarse que, disponiendo rótulas en los nudos indicados, el conjunto pasa a mecanismo, y puede experimentar desplazamientos incontrolados. En los dos casos representados, bastan 9 rótulas para

¹ El número de configuraciones que hay que probar es el de combinaciones de m elementos tomando n , siendo m y n muy parecidos, y por tanto de un orden muy comparable a m .

conseguir el agotamiento. Pero el de puntos posibles es 25. El número de configuraciones potenciales¹ (combinaciones de 25 tomados de a 9) es de ¡dos millones! Aunque con carga simétrica se puedan reducir a muchas menos, (del orden de un centenar, en este caso, muy simple), todo indica que el enfoque de explorar todas las configuraciones de losas es inviable.

Eso para peritar. Para proyectar tampoco el problema se complica mucho menos. En el caso del emparrillado de la figura 6, hasta que las demás se puedan deducir por equilibrio, habría que decidir del orden de un centenar de valores de solicitaciones. Y eso en este sencillo caso. En una losa extensa habría que tomar miles de decisiones. Resultará sumamente improbable que, sin contexto, las que se vayan tomando condicionen en las últimas un valor sensato. Todo indica pues que, aun tratándose del problema de proyecto, lo razonable sería decidir cómo se va disponer la capacidad resistente, adoptando un número discreto de valores. Con ello el problema de proyecto se traduce a uno de peritaje, aunque sea parametrizado, adoptando como incógnitas sólo unas pocas capacidades resistentes.

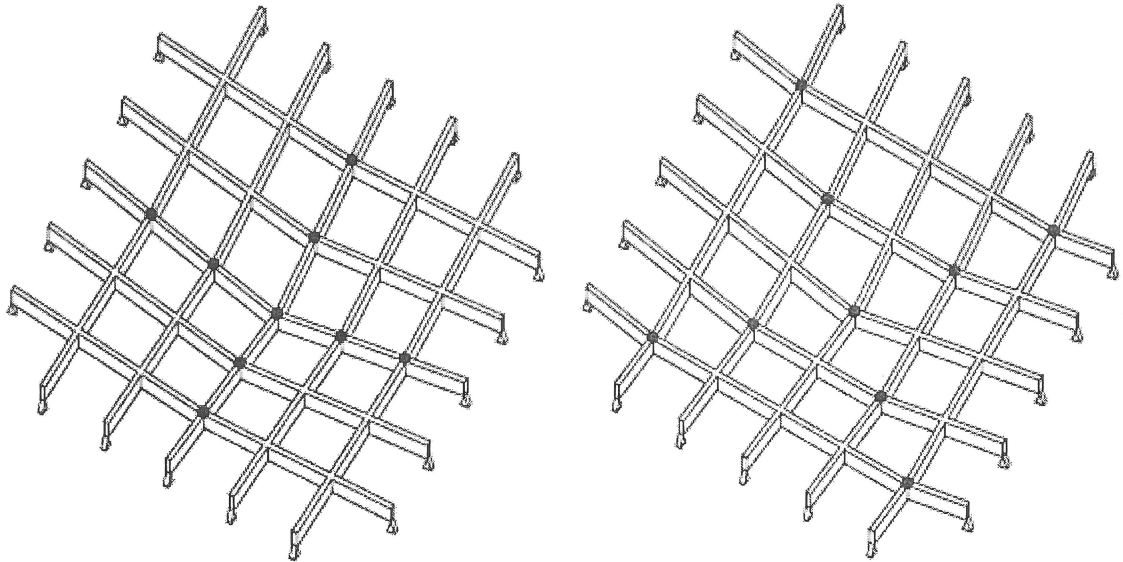


Figura 6. Emparrillado sencillo

Una losa propiamente dicha es un elemento superficial continuo. Si en barras las rótulas son puntos, en losa las articulaciones serán bisagras, o sea líneas. Ese fue el reto de Johansen al enfrentarse con el problema. El de cómo manejar el equilibrio con configuraciones de *líneas*, y, cuestión no menos relevante, cómo encontrar, con un esfuerzo de cálculo razonable, la configuración crítica, la que exige menos carga para alcanzar la *rotura*. De ahí la denominación de *líneas de rotura*

El objetivo de este texto es el de mostrar paso a paso, el procedimiento de calcular una losa o forjado reticulado, destinado a plantas de edificios, y por tanto, en general, sustentando en soportes, aplicando el método de líneas de rotura, y cómo sacarle partido².

¹ Ahora el número n es mucho menor que m , por lo que el número de combinaciones es del orden de m^n .

² El problema de sustentación en líneas se encuentra muy desarrollado en la literatura técnica. En cambio hay mucha menos información a torno a las losas sustentadas en puntos, como soportes, que es el caso más habitual en edificación. En el texto citado en la nota del prólogo, se desarrolla con profundidad el caso de sustentaciones lineales, pero no hay información acerca del caso de sustentaciones puntuales.

2. EQUILIBRIO POR TRABAJO

2.1 Trabajo virtual

Para ilustrar el tipo de procedimiento que se va a usar, y su mecánica operativa, quizá sea conveniente empezar por problemas muy sencillos en los que el lector ya sabe la respuesta, que ha obtenido planteando el equilibrio por métodos clásicos, (nulidad de resultante).

Con líneas de rotura el equilibrio se plantea por trabajo. Tiene necesariamente que salir lo mismo que con el vectorial, de nulidad de resultante. Pero, como se verá, es mucho más cómodo de manejar (es escalar), sobre todo en el caso de problemas en tres dimensiones, como son los de losas con carga transversal.

El método se conoce como el de *trabajos virtuales*. Se puede definir que un objeto está en equilibrio cuando el cambio a otra posición geoméricamente posible, ni aporta ni exige trabajo, o sea, que se puede pasar de una a otra con trabajo nulo. En su interpretación más física, el término virtual se refiere a que si hay equilibrio, ese movimiento no tendría que suceder realmente, y lo que se plantea es sólo si hay *tendencia* o no al cambio de posición. Se dice que hay equilibrio, si suponiendo un desequilibrio, y por tanto un movimiento, éste no se produce, porque el trabajo para conseguirlo sería nulo. En la formulación, el movimiento es infinitesimal, por lo que la expresión es la del trabajo diferencial¹.

2.2 Viga

Sea la viga de la figura 7. Es recta, de sección constante, simplemente apoyada en los extremos, con carga puntual centrada, F . La pregunta es qué capacidad a momento flector, M , debe tener la sección para que la viga sea capaz de sostener la carga.

La pieza puede descomponerse en dos, cortando por la sección central, aplicando en cada labio el momento flector que actúa en esa cara. Si hay equilibrio, con la estructura cargada, suponiendo que el punto medio de la viga desciende una cantidad minúscula, δ , el trabajo de la fuerza aplicada es $W = F \cdot \delta$. El de cada labio del corte es $W = M \cdot \phi$. Dado que hay dos labios, igualando ambos trabajos queda:

$$F \cdot \delta = 2 \cdot M \cdot \phi$$

y dado que $\phi = \delta/a$, resulta:

$$F \cdot \delta = 2 \cdot M \cdot \delta/a$$

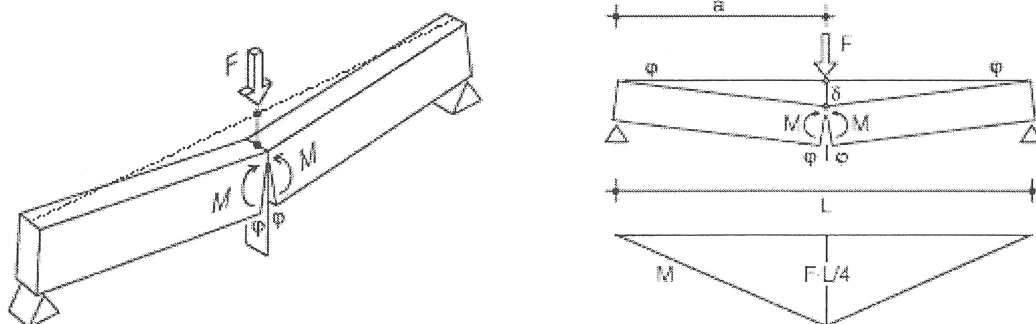


Figura 7. Viga apoyada

¹ Si el sistema admite el cambio de posición de varios puntos, el valor infinitesimal de cualquiera de ellos es algebraico, independiente del que toma en cualquier otro, y por tanto puede ser diferente en cada uno. De ahí que la expresión que resulta pueda reinterpretarse como que el trabajo que se produce en la estructura ya cargada, al cambiar arbitrariamente cada punto una cantidad cualquiera (no necesita suponerse diferencial, ni pequeña, ni plausible), es nulo. En esta interpretación, virtual se refiere a que no es verdadero trabajo, sino un mero producto de fuerzas por distancias que en realidad no se recorren. Con este enfoque el teorema es más potente desde un punto de vista matemático, pero tiene menos sentido físico.

Como no podía ser menos, la conclusión no depende del valor de δ , de manera que en efecto, es una variable de valor arbitrario o arbitrariamente pequeño.

El resultado para peritaje (qué carga F puede soportar la viga) o proyecto (qué capacidad a momento M necesita la sección central¹ de la viga) es :

$$F = 2 \cdot M/a \quad M = F \cdot a/2 \quad [1]$$

que era lo esperable, aunque el lector quizá lo identifique mejor si se pone $M = F \cdot L/4$

2.3 Cruceta

Tomemos un problema un poco más complejo. Una cruceta de dos vigas, con secciones diferentes (figura 8). El equilibrio se establece como antes ante la carga y los momentos flectores actuantes en los cortes inmediatos al nudo, M_1 y M_2 , resultando:

$$F \cdot \delta = 2 \cdot M_1 \cdot \varphi_1 + 2 \cdot M_2 \cdot \varphi_2$$

y dado que $\varphi_1 = \delta/a_1$ y que $\varphi_2 = \delta/a_2$, resulta:

$$F \cdot \delta = 2 \cdot M_1 \cdot \delta/a_1 + 2 \cdot M_2 \cdot \delta/a_2$$

En general no se puede saber qué relación tienen esos valores de momento flector con la capacidad de la sección. Cuando el de una pieza haya llegado a su límite, el de la otra puede que no.

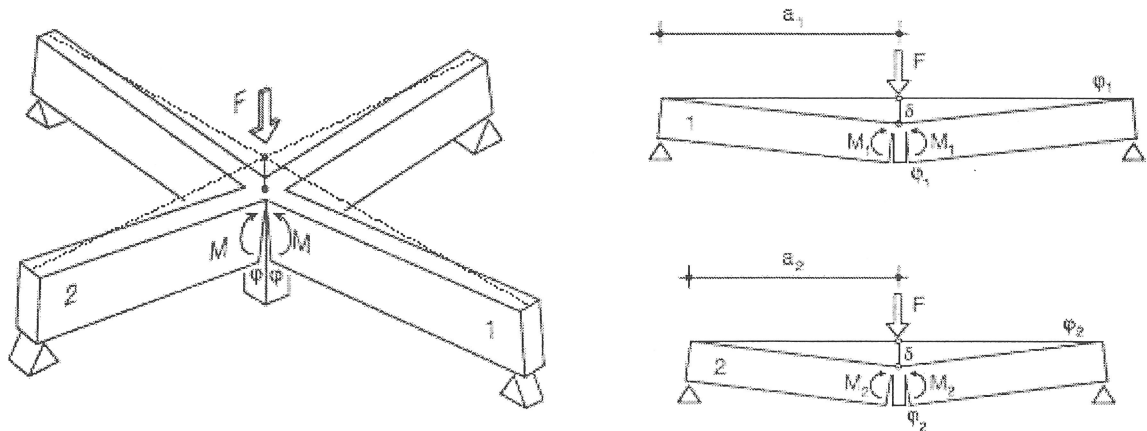


Figura 8. Cruceta

Así que, a partir de este caso y en lo sucesivo, introduciremos una condición. Trataremos sólo el caso en que el material pueda representarse por un modelo plástico. Al cargar la cruceta, una de las vigas llegará antes que la otra a su agotamiento. Pero si el material es plástico, la pieza agotada podrá mantener la sollicitación, incrementando la deformación, mientras la otra pieza llega a su agotamiento. En ese instante, en el de la *carga última*, cuando ambas piezas se encuentran agotadas, los momentos flectores de las secciones centrales de las piezas son iguales a su capacidad resistente. Así que sólo se puede sacar alguna conclusión si el equilibrio se plantea sólo en la situación última (que además es lo respetuoso con el enfoque de comprobación por *estados límite últimos*).

Con esa interpretación, la anterior expresión de equilibrio puede significar que la condición para que la cruceta pueda soportar la carga es:

$$F < 2 \cdot M_1/a_1 + 2 \cdot M_2/a_2$$

Si las capacidades resistentes de las vigas son iguales, ($M_1 = M_2$) y la longitud de los brazos son iguales ($a_1 = a_2$), la solución de peritaje (la incógnita es F) y proyecto (la incógnita es M) es:

$$F = 4 \cdot M/a \quad M = F \cdot a/4 \quad [2]$$

¹ Lo que les pasa a las demás secciones no interesa ahora. Sospechando que no necesitan más, se supone implícitamente que [1] es asimismo suficiente para todas. Pero si fuera preciso, eso se podría poner a prueba

Como en el caso anterior, esta expresión se interpreta como que para que la cruceta pueda soportar la carga F , es necesario que las secciones centrales tengan al menos una capacidad $F \cdot a/4$ (se supone que las demás exigen menos y les bastará con lo mismo).

2.4 Emparrillado

Consideremos ahora un caso con más piezas. El de la figura 9, una viga larga cruzada por dos cortas. Por comodidad, todas las longitudes, entre nudos, y entre nudos y extremos, son iguales, y de valor a . Se plantea el equilibrio en la situación última representada en la viñeta izquierda, **X**, con un descenso δ del nudo **A**. En el nudo **B** se supone que la pieza 1 no rompe su continuidad, pero en ese caso tendrá que hacerlo la 3. En la ecuación de equilibrio intervienen ahora los momentos flectores de cuatro labios del nudo **A** y dos del **B**, resultando:

Pieza 1, lado corto:	$M_1 \cdot \delta/a$
Pieza 1, lado largo:	$M_1 \cdot \delta/2a$
Pieza 2, ambos lados:	$2 \cdot M_2 \cdot \delta/a$
Pieza 3, ambos lados:	$2 \cdot M_3 \cdot 0,5\delta/a$

por lo que:

$$F \cdot \delta = M_1 \cdot \delta/a + M_1 \cdot \delta/2a + 2 \cdot M_2 \cdot \delta/a + 2 \cdot M_3 \cdot 0,5\delta/a$$

Al igual que en el caso anterior, si para F tomamos la carga última, y el material es plástico, los momentos $M_1 \dots M_3$ corresponden a la capacidad resistente a flexión. La condición para que el sistema pueda soportar la F (necesidad menor que capacidad) es pues:

$$F < 1,5 \cdot M_1/a + 2 \cdot M_2/a + M_3/a \quad [3]$$

Nótese que con cada planteamiento de equilibrio se está obteniendo una única condición, aunque contenga varias variables.

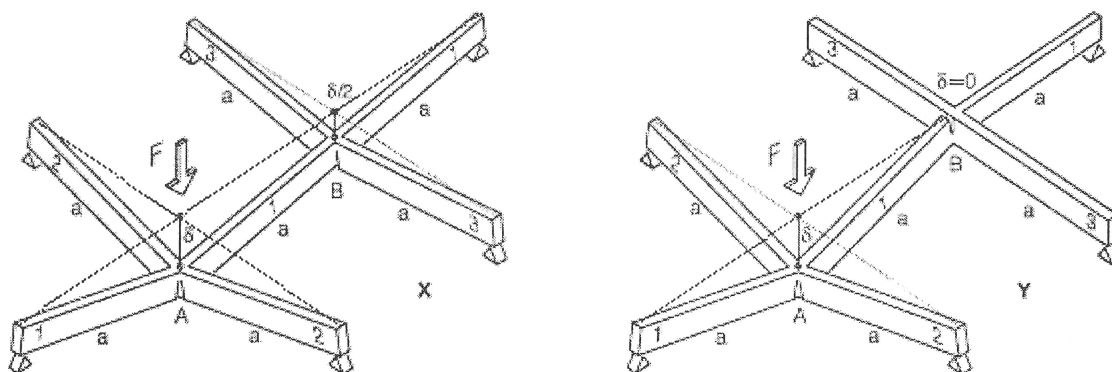


Figura 9. Viga con dos travesaños

Si el problema es de proyecto, (se conoce F y se intenta deducir cómo deben ser las M_i) la anterior es una condición absolutamente necesaria. Sean cuales sean las capacidades resistentes que se quiera dar a las piezas, al menos deben cumplir la condición anterior, o el conjunto colapsaría de la forma considerada. Puede que no sea suficiente, y que el sistema falle antes de otra manera, pero la condición es ineludible. Por ahora, las capacidades deben indefectiblemente cumplir esa condición. Evidentemente una sola condición no basta para determinar unívocamente las tres capacidades, así que sin más análisis parecería que hay varias posibles soluciones. Esta puede ser una de las grandes ventajas del método.

Si el problema es de peritaje, las M_i son conocidas y la pregunta es cuál es el valor de F que soporta el sistema. Por ahora todo lo que se puede decir es que el sistema estructural será capaz de soportar la carga F que se deduce de la expresión [3], o sea menos que un cierto valor. Nada se sabe todavía acerca de si existirá otra manera de colapso que se pueda producir con carga menor. Es decir no se puede asegurar que el sistema aguanta *hasta* esa carga. Pero sí que no aguanta más, porque si la carga fuera mayor, sabemos que rompería, si no lo ha hecho antes, de la manera analizada. Por ahora todo lo que sabemos de F es que puede ser a lo sumo igual al segundo miembro de [3].

Esta conclusión se expresa diciendo que un cálculo conduce a un *límite superior* del valor de carga soportable. El sistema no puede soportar más, pero no se sabe si puede que algo menos, ni en ese caso, cuánto menos. En la literatura técnica es habitual destacar este hecho como un punto débil del método. Pero debe advertirse que la conclusión no procede de que el análisis se haya hecho en rotura, ni por trabajos virtuales, sino de que se ha hecho *un* solo análisis. O lo que es lo mismo, de haber contemplado *un* solo equilibrio¹.

Sea cual sea el número de condiciones de equilibrio que se formulen, puede suceder que en conjunto, tengamos más, igual o menos condiciones que incógnitas. En cada caso hay una conclusión diferente.

Veamos el caso en que haya más incógnitas que ecuaciones. En el emparrillado que nos ocupa, otra posible forma de agotamiento sería la Y, la viñeta derecha de la figura 9. El equilibrio lleva a:

$$F \cdot \delta = 2 \cdot M_{1A} \cdot \delta/a + 2 \cdot M_2 \cdot \delta/a + M_{1B} \cdot \delta/a \quad [4]$$

Suponiendo, para peritaje, que las piezas son perfiles con capacidad igual a momento de ambos signos, ($M_{1A} = M_{1B}$), resulta, como otra condición necesaria, es decir que se debe verificar siempre, la de que:

$$F < 3 \cdot M_1/a + 2 \cdot M_2/a \quad [5]$$

En el caso de la cruceta de la figura 8, si se consideraba, como se estaba considerando, que el fracaso sólo podía darse en las secciones de nudo, el sistema sólo podría colapsar al ceder indefinidamente el punto central, y sólo se necesitaba plantear un equilibrio. Si la condición de ese sistema incluía más variables, quería decir que, para proyecto, había muchas combinaciones de dimensionado válidas.

En el caso de la figura 9, con dos nudos, bastaría considerar dos modos de fallo independientes, por ejemplo cada uno con descenso en uno de los nudos. Cualquier otro modo de fallo sería necesariamente combinación de ambos. Las contempladas en las dos viñetas de esa figura también podrían servir como base para obtener todas. Pero si todo lo que se puede obtener por equilibrio son dos condiciones, eso significa que, para proyecto, como hay tres capacidades incógnita, hay muchas maneras de dotar a las piezas de capacidad resistente suficiente.

Puede suceder lo contrario, que haya menos incógnitas que ecuaciones. Si por ejemplo en el caso de la figura 9, se quiere deducir qué carga F se puede soportar, dando a todas las piezas la misma capacidad resistente, M , se han obtenido dos condiciones. La [3] indica que $F < 4,5 \cdot M/a$, y la [5] que $F < 5 \cdot M/a$. Evidentemente la que manda es la [3], a menos que se encuentre otra que indique que menos todavía (algo que parece imposible, ya que se han probado los dos tipos de descenso posibles). En este caso la configuración de la viñeta izquierda puede decirse que es la *crítica*, ya que es la que se produciría antes, con el tipo de dimensionado supuesto. La otra condición no aporta información alguna.

A la luz de esta conclusión, el método de trabajo virtual adquiere una nueva y más realista interpretación. El sistema estructural, al irlo cargando, va deformando, pero como tal, la deformación elástica es imperceptible. Cuando llegue al colapso, y por lo que se ha deducido, lo hará de la manera de la viñeta izquierda de la figura 9, entrará en deformación incontrolada. El equilibrio por trabajo virtual representa el trabajo de un escalón cualquiera de esa deformación ilimitada de la configuración crítica.

Como última posibilidad, puede darse el caso con igual número de condiciones y variables. Cuando se usan perfiles o chapa, la capacidad resistente es la misma ante momentos flectores de ambos signos. De ahí que en los cálculos precedentes se haya supuesto que $M_{1A} = M_{1B}$. Pero cuando se usa hormigón armado, la capacidad a cada signo depende de la armadura dispuesta el borde traccionado, sin demasiada ventaja en que sea igual a la del otro borde. Sería por otro lado una torpeza que si se ha obtenido que $F = 4,5 \cdot M/a$, eso se traduzca en tener que disponer armadura corrida para M en ambos bordes y de todos los elementos. Tomando M_{1B} como distinto, de valor M' , pero $M_1 = M_2$, la formulación de la [4] queda:

$$F < 4 \cdot M/a + M'/a \quad [5']$$

¹ Si en una viga doblemente apoyada, con carga dada, se plantea el equilibrio, determinando por corte la capacidad que necesita una sección cualquiera, y esa es la capacidad con la que se dota a toda la viga, se concluye igualmente que la pieza no puede resistir más, pero no se sabe si con esa capacidad rompería antes, porque alguna otra sección demanda más capacidad. Para saber eso sería preciso proceder a más cortes. Pero por muchos que se den, nunca se puede garantizar que se ha encontrado exactamente el máximo, y la carga deducida como soportable será siempre sólo un límite superior. En la práctica, tras haber obtenido una decena de puntos, nos damos por satisfechos, y nos apañamos con eso.

En este caso, considerando dos modos de agotamiento, se obtienen dos condiciones, y como para proyecto, se necesitan deducir dos valores, la solución es unívoca. Dado que, según la condición [3], puede tomarse $F = 4,5 \cdot M/a$, y con la (5') bastaría que $F = 4 \cdot M/a + M'/a$, se deduce que $0,5 \cdot M/a = M'/a$, o sea $M' = M/2$. Resulta entonces mucho más rentable disponer en la cara inferior de todas las piezas armadura para una capacidad $M = F \cdot a/4,5$ y sólo en el entorno del nudo B en la pieza 1, armadura superior y sólo para $M' = M/2$.

De la discusión anterior se extrae una propiedad interesante que puede simplificar el cálculo en casos más complejos o inusuales. Si se han considerado dos configuraciones elementales, no hace falta comprobar las que se deduzcan de combinarlas aditivamente. En el ejemplo que manejamos, supongamos que se adopta una configuración que procede de la suma¹ de las otras dos, o sea $X+Y$. El resultado no puede ser sino el de $[3]+[5]$, o sea $2 \cdot F < 9,5 \cdot M/a$, que se traduce en $F < 4,75 \cdot M/a$. Es decir se obtiene un resultado intermedio entre ambas. Como un valor intermedio no puede ser menor que el inferior, se concluye que, en efecto, para encontrar la crítica no hace falta probar más que con más configuraciones elementales o simples, dejando de lado las que procedan de sumarlas.

2.5 Líneas de rotura en losas

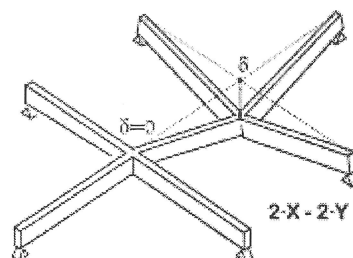
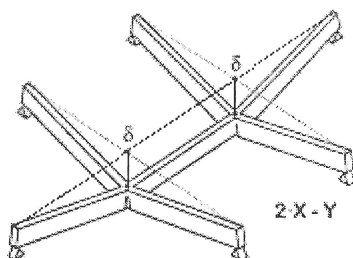
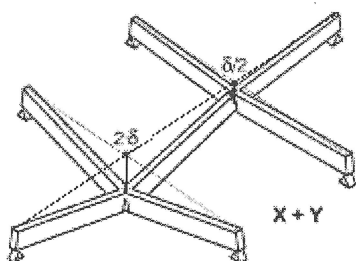
Un elemento superficial, tal como un forjado reticulado o losa, puede verse como un entrecruzado de nervios a flexión. La figura 6 mostraba un caso de referencia. Para esta asimilación resulta matemáticamente más sencillo suponer intervalo entre nervios constante, e igual en ambas direcciones, sin pérdida de generalidad.

Los nervios pueden presentar capacidad resistente diferente de unos puntos a otros del mismo nervio, de uno a otro nervio, en cada dirección, y a flexión de un signo u otro. Pero se entiende que racionalizar es hacer uso de esas variantes con la máxima parquedad posible. Se podría decir que lo que se intenta en un proyecto es lograr la máxima capacidad resistente de una losa al costo de la mayor uniformidad posible. Nótese que cuantos menos parámetros M diferentes se consideren, menos ecuaciones de equilibrio deben plantearse, y más fácil será deducir la configuración crítica. Si se parte de muchos valores M incógnita, habrá que plantear igual número de ecuaciones a partir de la misma cantidad de condiciones de equilibrio o agotamiento, y nada garantiza que la solución que resulte de ellas (porque será única) sea razonable. Y si, para que haya varias y haya margen de diseño, se plantean menos ecuaciones, habrá que determinar arbitrariamente el valor de las variables que faltan.

Así pues, de una forma u otra, una solución eficaz, como se adelantaba en 1.3, pasa por adoptar un número acotado de variables a deducir del cálculo. Que el cálculo más simple sea el que conduce a una solución muy rentable es la clave de la potencia del método.

Volvamos al caso de la figura 6, un conjunto de cinco nervios en cada dirección, cubriendo una planta cuadrada. En los términos del apartado 2.4, al tener 25 nudos podrían plantearse 25 formas elementales de agotamiento. La que se produjera en un caso real debería proceder de una combinación de esas 25. Pero, sobre todo para una carga con un patrón muy definido, tal como el de carga uniforme, cabe esperar que la forma de agotamiento, sobre todo si el dimensionado es racional y no caótico, responda asimismo a un patrón simple. El proceso de descubrir algunas notas del patrón es fácil. Cuando la carga produzca el primer punto de agotamiento, la losa no colapsa. Eso sólo sucederá cuando sean los suficientes para permitir movimientos globales incontrolados. En esa situación, la deformación de los puntos agotados debe ser grande, pero la de los puntos no agotados, todavía en régimen elástico, debe ser despreciable comparada con la de los otros. Si la geometría original era de nervios rectos, los trozos elásticos seguirán

¹ La suma de dos configuraciones consiste en adoptar en cada punto la suma de los descensos de cada una. Algunas combinaciones del caso analizado serían:



siendo zonas triviales regladas¹, en general planas. Por tanto los puntos agotados deben situarse en la intersección de planos, es decir que se dispondrán sobre rectas. Es lo que se percibe en la figura 6.

El trabajo de las fuerzas procede de obtener cada carga por su descenso y sumarlos todos. Para carga uniforme depende pues del *volumen* de la configuración de colapso. El trabajo que se opone al anterior es el resultado la suma de los productos de las capacidades por el giro a lo largo de las líneas de rotura. La estrategia de plantear sólo las configuraciones candidatas a críticas, será pues la de probar con formas poliédricas que concilien algo así como el máximo de volumen con el mínimo de quiebro en la longitud total de las aristas².

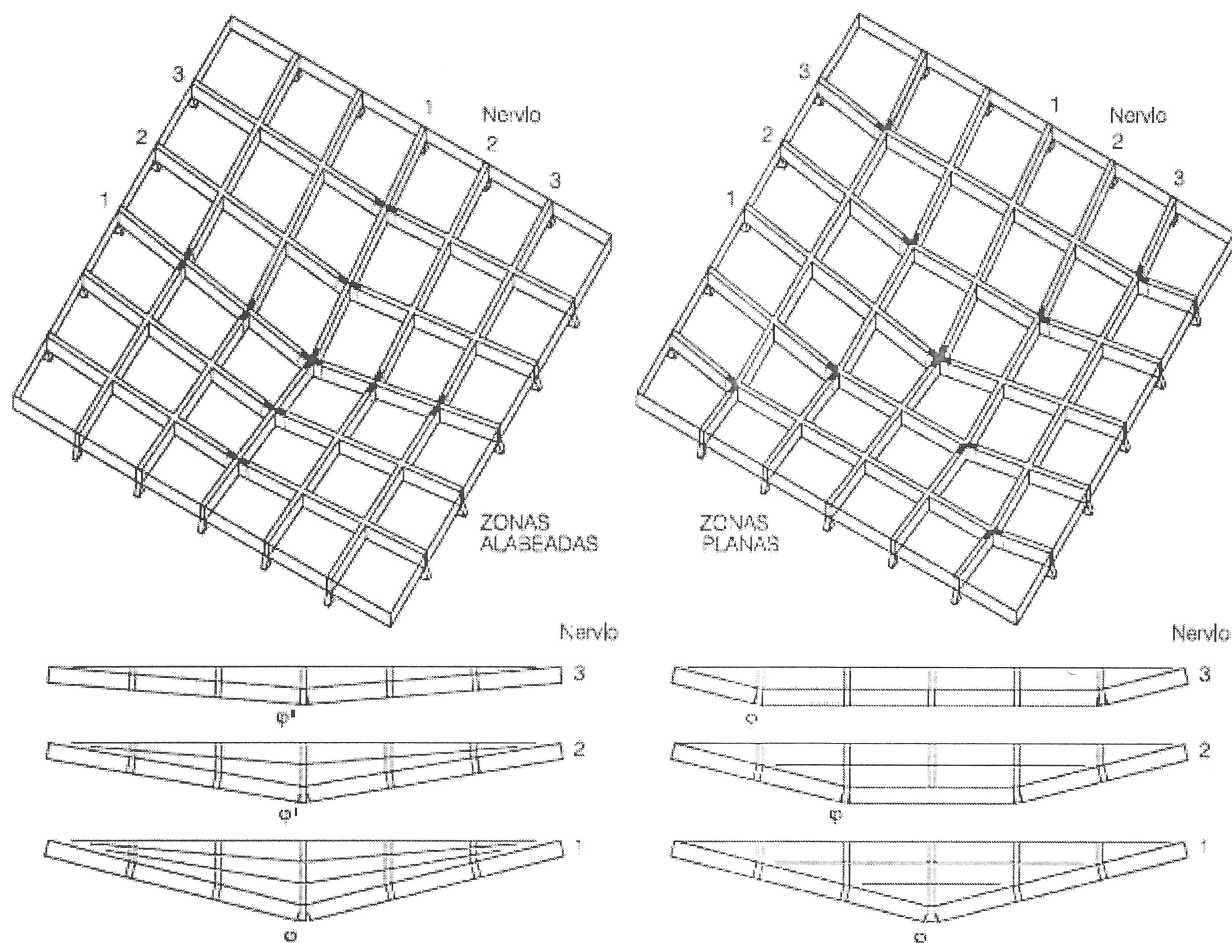


Figura 10. Reticulado

Las de la figura 6, se reproducen en la figura 10, añadiendo, para mejorar su lectura, alzados de todos los nervios. Parecen ser las mejores candidatas a la configuración crítica. Más adelante, se volverá sobre esta cuestión. El lector podrá poner a prueba si ha captado lo esencial del método tratando de obtener, en estos casos, cuál es, por ejemplo, la capacidad de los nervios, suponiendo que es la misma en todos y en todas sus secciones, para soportar una carga dada en cada uno de los nudos.

¹ La condición general es la de zonas regladas, no necesariamente planas. En los problemas que sólo responden con flexión ante curvatura en dos direcciones, en efecto, esas zonas pueden ser alabeadas. Pero aun los forjados reticulados tienen una razonable indeformabilidad a torsión, y sobre todo suficiente proximidad entre nudos, para presentar una no despreciable rigidez al alabeo, de manera que es preferible analizarlo con modelo losa, y por tanto con zonas planas entre líneas de agotamiento. Sólo en casos de soluciones con nervios paralelos, como forjados unidireccionales o pantallas de pilotes, resultaría aceptable el modelo alabeado.

² Cabe suponer que, aunque haya formas muy refinadas, a base de docenas de pequeños planos, con centenares de líneas de pequeña longitud, una regularización del conjunto arroje resultados similares. Considerar una configuración muy facetada, debe dar algo sumamente parecido en volumen a la formada por menos planos. Igualmente, en cuanto al término de trabajo de las líneas, la sustitución de una faceta pequeña por la prolongación e intersección de las de los lados, conduce al mismo número de nervios, quebrantados en menos puntos, pero con giro total similar.

3. PROBLEMAS CANÓNICOS

3.1 Losa sustentada en dos bordes paralelos

Para introducir el manejo del método de equilibrio por trabajos virtuales, podríamos retroceder a un caso simple, como el de losa rectangular de luz L , simplemente apoyada en dos bordes opuestos y ancho b , (véase figura 11). Se supone carga uniforme por unidad de superficie p y, por ahora, capacidad uniforme a flexión m en todos los puntos y (aunque por ahora no se necesite) en todas direcciones¹.

El lector que tenga dificultades para imaginar mecánicamente una losa, puede mentalmente sustituirla por una retícula de nervios. Una carga p por unidad de superficie, se traduciría en una carga de valor igual a $F = p \cdot a^2$ en cada nudo, siendo a el intervalo entre nervios. Una capacidad m por unidad de longitud significaría una de $M = m \cdot a$ en cada nervio. Si F se mide en kN, la carga p se mide en kN/m². Si el momento M se mide en m·kN, m se mide en m·kN/m.

La configuración probablemente crítica es la que tiene una rotura en la línea media entre ambos bordes. Si esa línea desciende δ , la resultante del total de la carga de cada media losa es igual a $p \cdot b \cdot L/2$, y el punto de aplicación de la resultante es el centro de ese rectángulo, (b por $L/2$), punto que desciende $\delta/2$. El trabajo de la carga de los dos trozos de losa es pues $W = 2 \cdot p \cdot b \cdot L/2 \cdot \delta/2$, o sea $W = p \cdot b \cdot L \cdot \delta/2$. En cada unidad de longitud de línea de rotura, la capacidad es m . En estado último, el valor del momento flector será igual a m . En cada uno de los labios de la línea, el giro es ϕ , por lo que el trabajo total es $W = 2 \cdot m \cdot b \cdot \phi$.

Como $\phi = \delta/0,5 \cdot L$, para proyecto (capacidad al menos igual a necesidad), resulta:

$$2 \cdot m \cdot b \cdot \delta/0,5 \cdot L > p \cdot b \cdot L \cdot \delta/2$$

o sea:

$$m > p \cdot L^2/8$$

[6]

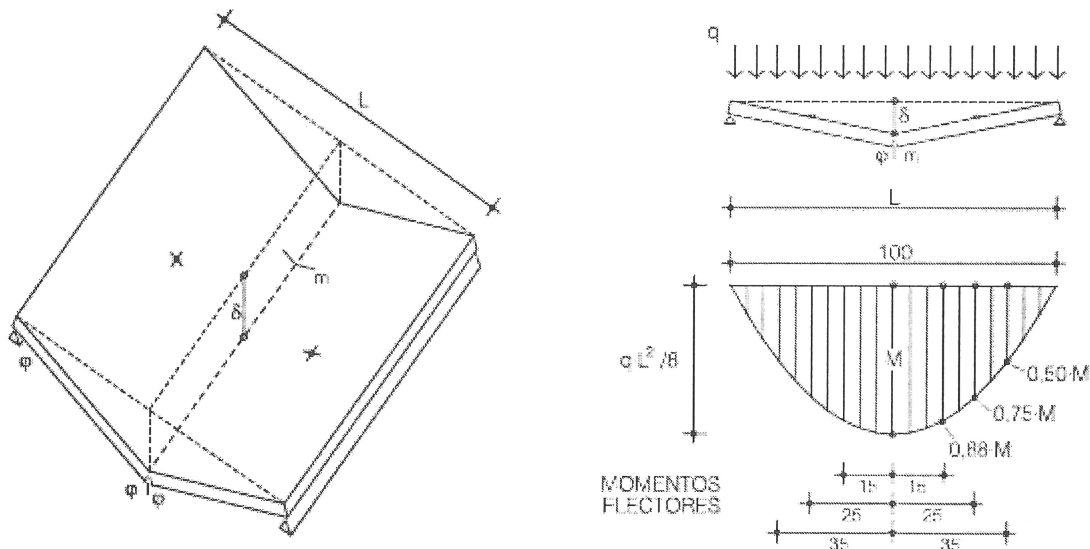
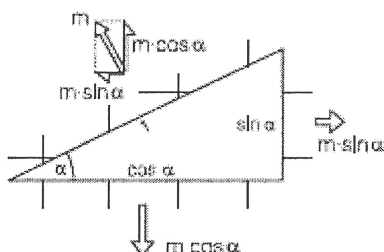


Figura 11. Agotamiento de una losa apoyada en dos bordes paralelos

¹ Con chapa de acero, eso significa grueso constante. En hormigón armado, significa canto constante, y para momento flector de un signo, igual densidad de armadura en *dos* direcciones ortogonales de la cara traccionada. Con armadura igual en dos direcciones se obtiene capacidad resistente igual en *todas*.



La demostración, clásica, es simple. Sea una zona en la que hay armadura en cuadrícula, y por tanto, con capacidad igual, m , por unidad de longitud, en las dos direcciones. Tomando una longitud unidad en una dirección de oblicuidad α , la de los dos catetos del triángulo proyección valen $\cos \alpha$ y $\sin \alpha$. Por tanto, en esos catetos la capacidad a flexión es $m \cdot \cos \alpha$, y $m \cdot \sin \alpha$. Por equilibrio, en la hipotenusa pueden aplicarse esfuerzos opuestos. La composición de ambos arroja una resultante de valor

$$m \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha + m \cdot \sin \alpha \cdot \sin \alpha = m (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = m.$$

Por tanto todas las direcciones tienen la misma capacidad.

resultado que, por otro lado, era el esperable. Basta dar pues a cada tira de 1 m de ancho, la capacidad, m , que necesita una viga doblemente apoyada, de luz L y carga uniforme p . Cómo sea realmente el ancho respecto a la luz, no importa¹.

Conviene precisar que dar a todas las secciones, en la totalidad de la superficie de la losa, una capacidad resistente $m = p \cdot L^2/8$, conduce a una solución válida, pero no es necesario hacerlo. Las que no están en la línea media *pueden* tener menos.

Es inmediato verificar lo que sucede si se considerara el agotamiento por otras líneas paralelas a las de sustentación. En la figura 12 aparecen otras tres. Tomemos la de agotamiento a cuartos (la anotada como 3). Como la mitad de la losa la carga descende δ , y la otra mitad descende linealmente de 0 a δ , en promedio $\delta/2$, el trabajo de la carga es $W = p \cdot b \cdot L/2 \cdot \delta + p \cdot b \cdot L/2 \cdot \delta/2$, o sea $W = 0,75 \cdot p \cdot b \cdot L \cdot \delta$.

Ahora en cada línea sólo gira uno de los labios, por lo que el trabajo total es el mismo que antes, o sea $W = 2 \cdot m_3 \cdot b \cdot \phi$, sólo que ahora el giro es $\phi = \delta/0,25 \cdot L$, por lo que resulta:

$$2 \cdot m_3 \cdot b \cdot \delta/0,25 \cdot L > 0,75 \cdot p \cdot b \cdot L \cdot \delta$$

y por tanto

$$m_3 > 0,75 \cdot p \cdot L^2/8$$

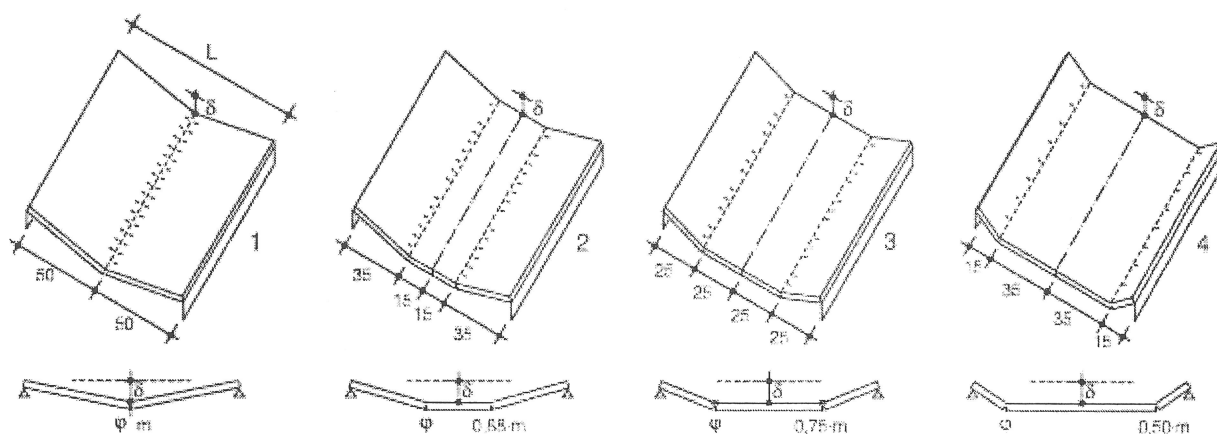


Figura 12. Agotamientos locales

Se confirma que en las demás líneas se puede disponer menos, pero no mucho menos. En los demás cortes se puede proceder de manera análoga. Lo que se obtiene es, como no podía ser de otra forma, que es suficiente una capacidad igual al momento flector de ese corte, considerando para la losa el modelo de viga de luz L de la figura 11. Nótese que los resultados de la figura 12 son los mismos que los momentos flectores anotados en la figura 11. Por tanto, para capacidad uniforme, la rotura crítica corresponde a la línea central, donde el momento flector es máximo. En cualquier caso esas otras líneas o roturas locales, pueden servir para verificar hasta dónde se puede disponer una capacidad menor, pero se obtendría lo mismo que si se usara el diagrama de momentos flectores al modo habitual.

La figura 12 representa, con unos pequeños trazos, lo que, con solución de hormigón armado, sería el número de redondos que necesita cada línea, a partir de los necesarios en la central, eliminando intermitentemente algunos de ellos. En la práctica, la limitación de armadura mínima o la regla de separación máxima por fisuración reduce mucho esas posibilidades. Puede comprobarse que no hay mucho margen de maniobra. Hasta no llegar al corte 4, del 70% de la luz, no se puede suprimir² uno de cada dos redondos. La figura 13 representa cómo serían algunos despieces. Al pie de cada una se anota un indicador que representa la cantidad total teórica de acero que supone. En muchos casos la complejidad constructiva no compensa la exigua reducción a la que se puede aspirar, así que la regla práctica será disponerlos todos de lado a lado.

¹ En un análisis elástico, debido al efecto de Poisson, las solicitaciones no son iguales en cada banda de 1 m de ancho, y el resultado final sí depende de cómo sea el ancho en relación a la luz. Considerar estado último *borra* esa dependencia.

² Las longitudes que se anotan y representan en las figuras son *netas*. A esa longitud habría que añadir la longitud de anclaje necesaria para que alcance su capacidad a tracción.

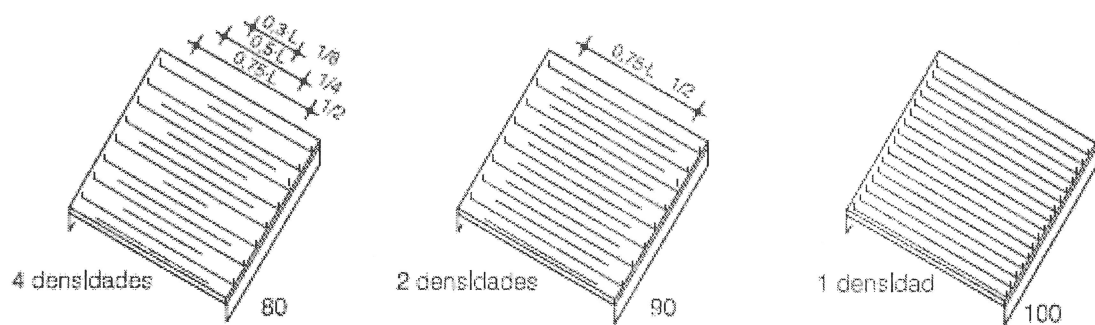


Figura 13. Armado de una losa apoyada en dos bordes con carga uniforme

Si los bordes de sustentación estuvieran empotrados, (o en continuidad) el único cambio en [6] sería el de añadir, en el primer miembro, el término adicional de trabajo de esas líneas, que, para m igual ante flexión de ambos signos, es exactamente igual al ya considerado. El del labio de un lado de la línea central es igual al de su borde respectivo (véase figura 14). Eso es lo que corresponde a acero, que tiene igual capacidad a momento flector de ambos signos. En hormigón, depende de si se pone la misma armadura arriba que abajo. En el caso más general, en el que $m_{inf} \neq m_{sup}$, el resultado sería:

$$m_{inf} + m_{sup} > p \cdot L^2 / 8 \quad [7]$$

En ese caso nos encontramos con una condición para dos variables. Se puede pues tomar el valor que se quiera para cada una. Pero si, por ejemplo, se desea disponer armadura superior en una longitud acotada, bastará considerar el agotamiento, local, en la zona en que sólo haya armadura inferior, lo que llevará a una condición que condiciona el valor de esa variable, y con la [6] despejar la otra. El lector puede comprobar que esa operación es la clásica con el diagrama de momentos flectores.

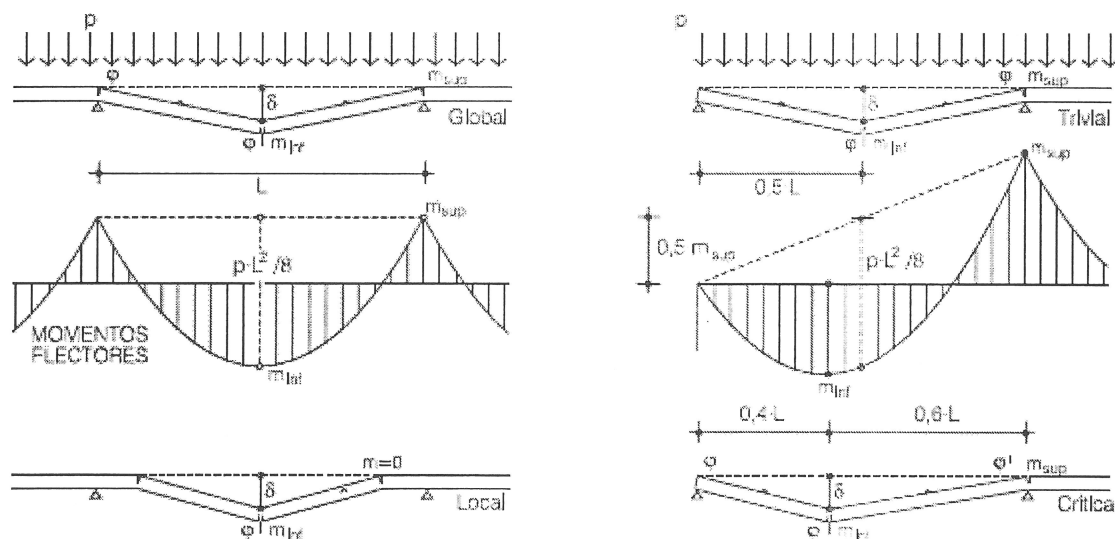


Figura 14. Losas continuas sustentadas en dos bordes paralelos

Si se produce una situación intermedia, tal como la de que la losa esté simplemente apoyada en un borde y perfectamente empotrada en el otro, al primer miembro de [6] sólo hay que añadir el equivalente a un labio, correspondiente al borde empotrado, y por tanto la conclusión sería $m_{inf} + 0,5 \cdot m_{sup} > p \cdot L^2 / 8$. Sin embargo es fácil comprobar que esta expresión, trivial, procedente de un corte a mitad de luz, se queda corta. No es la crítica. Dado que el problema es asimétrico, adoptando una línea más cerca del borde apoyado, tal como a $0,4 \cdot L$, (en rigor depende de la relación de m_{inf} a m_{sup}), la expresión de equilibrio es:

$$m_{inf} \cdot b \cdot \delta / 0,4 \cdot L + m_{inf} \cdot b \cdot \delta / 0,6 \cdot L + m_{sup} \cdot b \cdot \delta / 0,6 \cdot L > (p \cdot b \cdot 0,4 \cdot L + p \cdot b \cdot 0,6 \cdot L) \cdot \delta / 2$$

o sea:

$$2,5 \cdot m_{inf} \cdot b / L + 1,6 \cdot m_{inf} \cdot b / L + 1,6 \cdot m_{sup} \cdot b / L > p \cdot b \cdot L / 2$$

de manera que es más correcto considerar:

$$m_{inf} + 0,4 \cdot m_{sup} > p \cdot L^2 / 8 \quad [8]$$

3.2 Losa cuadrada sustentada en los bordes

Una losa sustentada en los cuatro bordes, con carga y capacidad resistente uniformes, es como la intersección de dos de las anteriores. La rotura fundamental sería pues la de un tejado a cuatro aguas, o en pirámide. El centro descende, y se forman líneas de rotura diagonales.

Para plantear el equilibrio, véase figura 15, por lo que respecta al trabajo de las líneas, debería sumarse el momento a lo largo de OA, OB, OC y OD, teniendo en cuenta el giro entre los dos labios de cada línea. Para simplificar la complejidad geométrica será útil retornar al modelo de nervios, usando el recurso conocido como de *proyección*. En la figura, aparecen dibujados por separado los nervios de cada dirección. Puede comprobarse que el número de nervios que acometen a OA es el mismo que sale de AE. Y el quebranto de los nervios, que sólo se da en el labio de ese lado, es justamente igual al giro del plano AOE respecto a la horizontal. El trabajo del labio completo AOB será pues el del total del momento, $m \cdot L$, por el giro, ϕ , de valor $\phi = \delta/0,5 \cdot L$. Otrotanto sucede con el labio AOD, y los nervios de la otra dirección. En total el trabajo total procede de contar el trabajo de los quebrantos en los cuatro diedros.

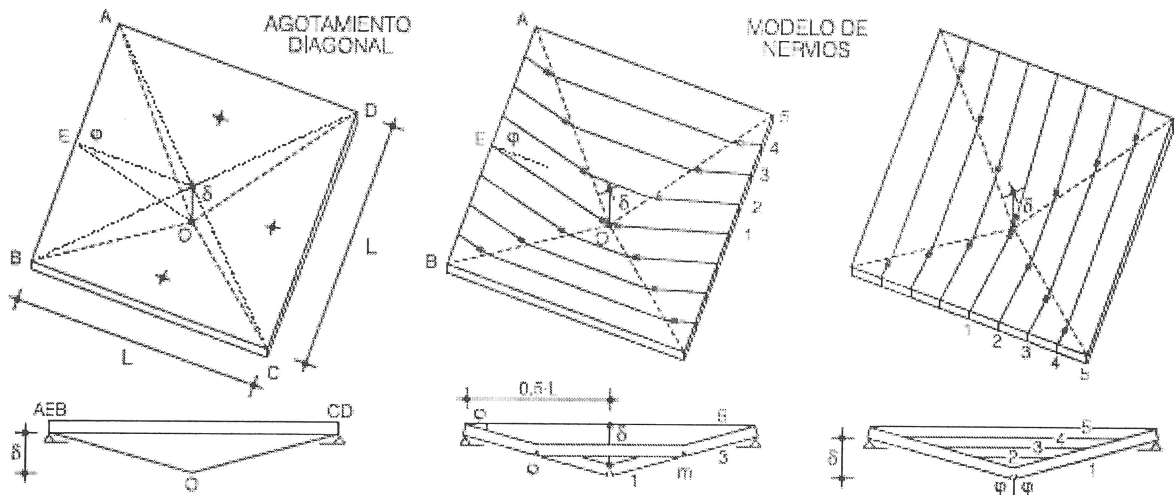


Figura 15. Losa cuadrada apoyada en los bordes

El trabajo de la carga debe sumar igualmente el del descenso de la que hay en cada diedro, que es igual a la cuarta parte de la carga total por el descenso de la resultante de la carga en el triángulo, o sea $\delta/3$.

La ecuación de equilibrio es pues:

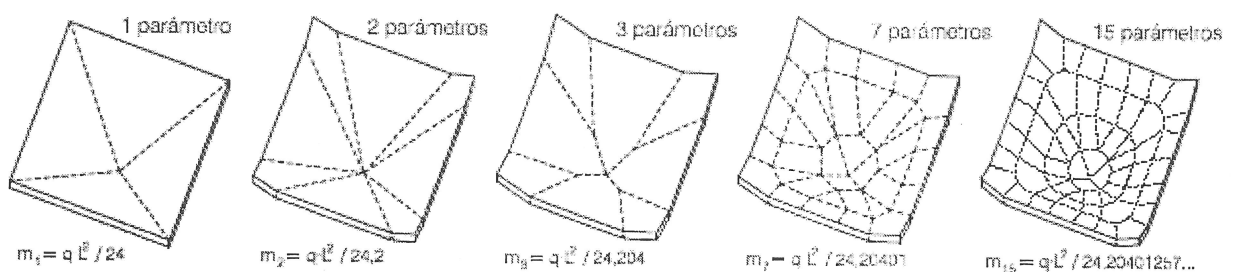
$$4 \cdot m \cdot L \cdot \delta/0,5 \cdot L = p \cdot L^2 \cdot \delta/3$$

o sea:

$$m = p \cdot L^2 / 24 \quad [9]$$

que es el valor que, en promedio, debe presentar la losa en todos los puntos de las diagonales. Puede tener menos en algunos, si se dispone más en otros. Mientras no se prueben otros cortes por si en otros puntos de la losa se demanda más, o se puede disponer menos, debería dotarse a la losa de esa capacidad de manera uniforme, suponiendo que la rotura analizada es la crítica¹.

¹ En esto el paso de viga a losa produce una sorpresa. En viga (losa sustentada en dos bordes) el corte crítico es, sin ninguna duda, el de la línea a medias. En losa no es exactamente la de las diagonales. Para capacidad resistente uniforme pero de un solo signo, considerando configuraciones como las de la figura adjunta, el valor aumenta con el número de facetas, si bien sólo muy ligeramente. Si la losa tiene capacidad resistente a momentos flectores de ambos signos, la crítica es la diagonal. En la práctica, se considera suficiente considerar el agotamiento diagonal.



El valor de [9] es la tercera parte de lo de una viga o losa apoyada en dos bordes, de igual luz, que es $p \cdot L^2 / 8$. Si se considera que una losa apoyada en los cuatro bordes es como dos vigas cruzadas, cada una de ellas se ocuparía de la mitad de la carga, resultando en cada dirección un momento flector $p \cdot L^2 / 16$. Todo indica que la consideración de líneas de rotura aporta la ventaja de bajar de la mitad a la tercera parte.

No es exactamente por haber usado líneas de rotura, sino por disponer esa capacidad en toda la superficie. Un análisis clásico llevaría a un momento flector $p \cdot L^2 / 16$, pero como valor máximo, sólo en el centro. Según se fueran tomando puntos más cercanos a los bordes, se podría poner cada vez menos. Sucede que, en muchos casos, por simplicidad constructiva, se acaba disponiendo capacidad uniforme (grueso en el caso de placa de acero, armadura en el caso de losa de hormigón), y del lado de la seguridad se dispone para $p \cdot L^2 / 16$ en toda la superficie. El método de líneas de rotura, permitiendo, desde el principio partir de ese supuesto, lo que hace es optimizar esa decisión, concluyendo que el valor uniforme mínimo posible es $p \cdot L^2 / 24$.

Veamos dónde y cuánto podría disponerse menos. En una losa sustentada en dos bordes, se obtuvo la capacidad de la línea central, y de otros cortes (figura 12) se dedujo que en otros puntos podría disponerse menos. En una losa sustentada se puede repetir el planteamiento, pero la manera de sacara partido a los resultados es distinta.

Véase la figura 16. Se han tomado configuraciones que podrían proceder de las de la figura 12 en ambas direcciones. La primera es la ya estudiada, habiéndose obtenido que $m_1 = p \cdot L^2 / 24$.

Considerando el modelo de nervios, se observa que sólo hay quebrantos cuando éstos intersecan a las líneas de rotura acometiendo desde los planos trapeziales. Y para sumar la capacidad en todo el desarrollo del labio del lado de uno de esos planos, (AA'B'B en la figura 17) como se los tres tramos se puede medir en proyección, (en el lado AB) el resultado sería el de el momento total $m \cdot L$, por el giro, ϕ , del plano. En el caso 3, el giro es $\phi = \delta / 0,25 \cdot L$.

En cuanto al trabajo de la carga, en el caso 3, la parte central, con superficie cuarto del total descende δ . Descomponiendo los trapecios en rectángulos y triángulos, el conjunto de los cuatro rectángulos ocupa una superficie mitad del total, y el centro de gravedad de cada uno descende $\delta/2$. Los ocho triángulos suman el cuarto que falta de la superficie total, y sus centros de gravedad descenden $\delta/3$.

La condición de equilibrio es pues:

$$4 \cdot m_3 \cdot L \cdot \delta / 0,25 \cdot L = p \cdot L^2 (0,25 \cdot \delta + 0,50 \cdot \delta / 2 + 0,25 \cdot \delta / 3)$$

o sea:

$$16 \cdot m_3 = 7/12 \cdot p \cdot L^2 \quad \rightarrow \quad m_3 = 7/8 \cdot p \cdot L^2 / 24$$

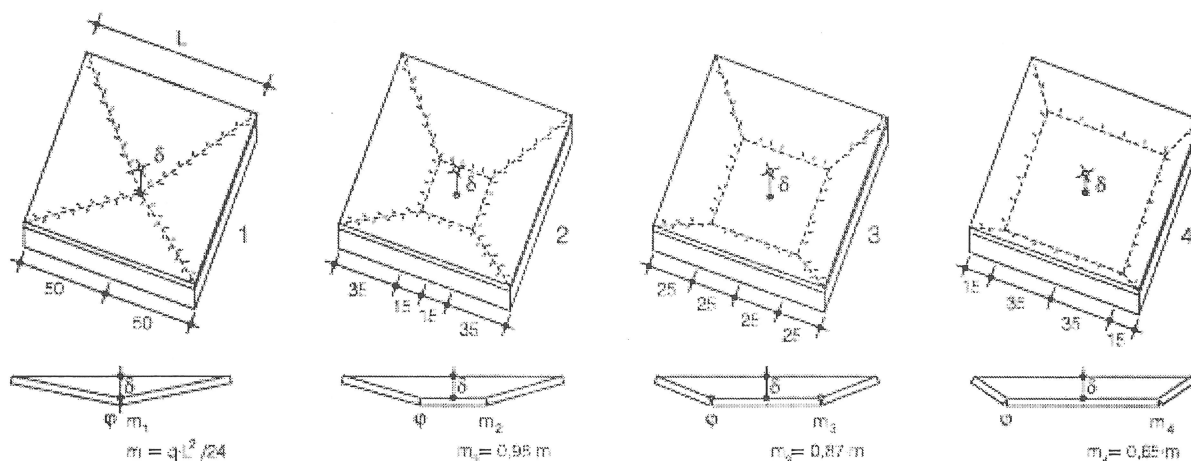


Figura 16. Cortes locales

Pero en este caso, que el momento m_3 sea inferior al obtenido en el corte diagonal, m , no quiere decir que se pueda simplemente poner menos en la zona exterior de la losa. Se puede hacer eso, pero si a cambio en la parte central se dispone más que m . Nótese que en la figura 12, los cortes locales interesaban a armaduras diferentes de las consideradas en el corte central, y en este caso, parte de las armaduras del corte 3, las situadas en las diagonales, son las mismas que las del corte diagonal global. Véase la figura 17. El corte global interesa a las armaduras que cortan a la línea AOB, y para todas ellas se ha obtenido que basta m . El corte ahora analizado interesa a las armaduras que cortan a AA'B'B, y

para ellas se ha obtenido que es suficiente m_3 . Pero como AA' y BB' son comunes a ambas, para aprovechar el resultado de m_3 debe deducirse qué hay que hacer en m_0 . Si en el promedio de OA debe darse m y en la zona AA' basta disponer $7/8$ de m_1 , eso quiere decir que en OA' debe disponerse $9/8$ de m_1 . La conclusión es que si lo que se intenta ganar por un lado, se pierde por otro.

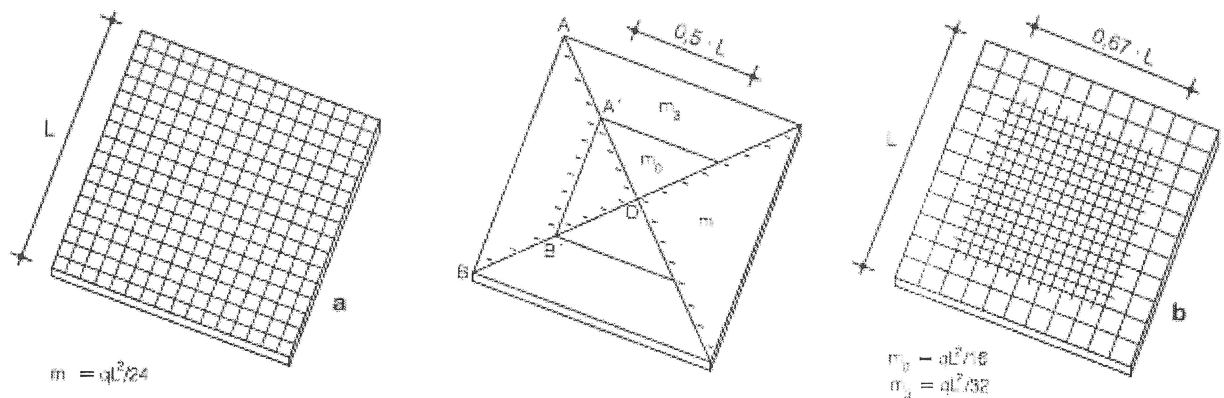


Figura 17. Armado con una y dos densidades

En la figura 17 aparecen comparados el caso **a** de una densidad, en toda la superficie, y **b** con dos, disponiendo en la periferia armadura de densidad mitad, quitando una de cada dos armaduras. Lo que sale es que la **b** ni siquiera tiene menos armadura total que la **a** y es más compleja de disponer, de manera que este tipo de refinamientos no parecen eficaces.

En la figura 18 aparecen otras estrategias posibles para minimizar la cantidad total de armadura, quitando de donde puede no ser necesaria. Todas ellas necesitarían ponerse a prueba con cortes específicos. Algunas, como la **e** puede validarse muy rápidamente si el total de armaduras es la deducida con m y tiene las que necesita en un corte local al ras de la parte clareada. Son las mismas armaduras que las de la **a**, pero más concentradas en el centro. En ese caso no se ahorra nada de acero, y es más compleja de ejecutar. Su ventaja puede ser la flecha, (resiste lo mismo, pero deforma menos), aspecto al que el método de líneas de rotura no accede, pero que será fácil constatar en la realidad. Por lo que se ha visto, es poco probable que alguna de ellas pueda competir con la simple de densidad uniforme.

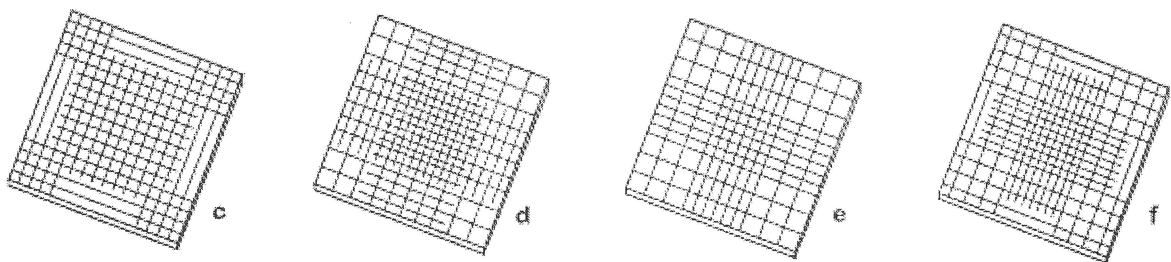


Figura 18. Variantes de armado de losas apoyadas en el contorno

El lector podrá deducir por su cuenta los resultados para las variantes de planta rectangular y de continuidad en los bordes.

3.3 Losa cuadrada sustentada en el centro

El caso opuesto a sustentación en los bordes, es la de sustentación en un punto, soporte, en el centro de la losa. Se analizará igualmente el caso de forma cuadrada, carga y capacidad uniformes, pero ahora con sólo capacidad a tracción por su cara superior.

La forma trivial de agotamiento es cuando se produce en una línea pasando por el soporte. Cuando dicha línea es paralela a un lado, figura 19, caso **X**, el cálculo es inmediato. Partiendo de un descenso δ en los bordes paralelos a la línea, el trabajo de los dos labios de la línea es $W = 2 \cdot m' \cdot L \cdot \phi$, siendo $\phi = \delta/0,25 \cdot L$. El de la carga dado que la resultante de cada diedro descende $\delta/2$, es $W = p \cdot L^2 \cdot \delta/2$, y por tanto la condición de equilibrio es:

$$2 \cdot m' \cdot L \cdot \delta / 0,25 \cdot L = p \cdot L^2 \cdot \delta / 2$$

o sea

$$m' = p \cdot L^2 / 8 \quad [10]$$

que es la capacidad resistente que hay que dar a los puntos de esa línea (y por simetría a la perpendicular).

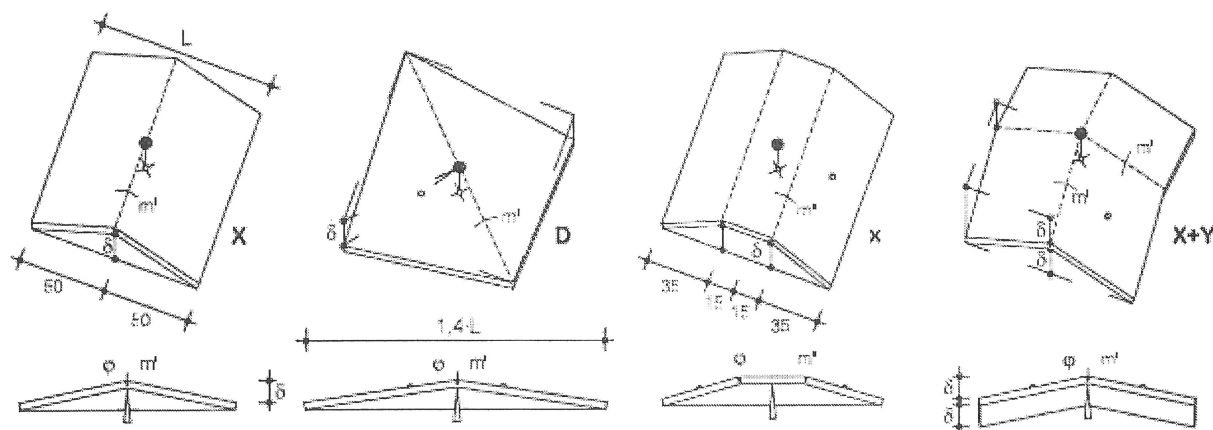


Figura 19. Agotamiento por diedros

El agotamiento por la línea diagonal, caso D, arroja un resultado distinto. Sea ahora δ el descenso de los vértices opuestos. El trabajo de las líneas es $2 \cdot m' \cdot 1,4 \cdot L \cdot \phi$, pero ahora es $\delta / 0,7 \cdot L$. La resultante de carga de cada diedro se sitúa al tercio de la diagonal, y por tanto desciende $\delta / 3$. La ecuación es:

$$2 \cdot m' \cdot 1,4 \cdot L \cdot \delta / 0,7 \cdot L = p \cdot L^2 \cdot \delta / 3$$

o sea

$$m' = p \cdot L^2 / 12$$

que en efecto es menor que [10] por lo que no es la rotura crítica. Los puntos de la diagonal requieren menos capacidad resistente que los lados medios.

Si se considera simultáneamente el agotamiento X con el agotamiento del lado perpendicular, Y, la suma tiene el aspecto indicado en la figura 19. Aunque el cálculo es algo más complejo, no hay por qué hacerlo. El resultado es evidentemente el [10]. Pruebe el lector y lo verá.

Procede ahora averiguar si la capacidad [10], deducida para el corte X, que podría materializarse en armaduras perpendiculares a esa línea, pueden disponerse de manera uniforme a lo largo de ella, (en placa de acero, si se puede disponer grueso constante), y cómo pueden reducirse en longitud.

Lo segundo es más sencillo. Si se analiza lo que sucede en líneas paralelas a de agotamiento en X, caso x de la figura 19, que se sitúan al 15% de la luz, el trabajo del labio quebrantado de cada línea es $W = m'' \cdot L \cdot \phi$, con $\phi = \delta / 0,35 \cdot L$. El trabajo de la carga es $W = 0,7 \cdot p \cdot L^2 \cdot \delta / 2$. La condición de equilibrio queda:

$$2 \cdot m'' \cdot L \cdot \delta / 0,35 \cdot L = 0,7 \cdot p \cdot L^2 \cdot \delta / 2$$

o sea

$$m'' = 0,7 \cdot p \cdot L^2 / 8$$

es decir, la mitad que [10], lo que se traduce en que a partir de esa distancia, bastaría con que prosigan un 70% de las armaduras (anclaje aparte). Como sucedía con la losa apoyada en dos bordes, esta conclusión corresponde al diagrama de momentos, en este caso de una ménsula.

En la figura 20 aparece, a izquierda, la distribución de armadura en cuadrícula como si se hubiera deducido del valor [10], y a continuación el diagrama de la ménsula. Puede observarse cómo a la mitad de la luz, el momento flector se ha reducido a la cuarta parte. Para operar con números gruesos, y contar con un margen para anclaje, se considera de manera simplificada que a mitad de distancia podría eliminarse una de cada dos armaduras. La viñeta siguiente muestra el despiece de armado en una dirección, con reparto uniforme y esa reducción de longitud de la mitad de las armaduras.

La siguiente viñeta muestra cómo quedaría la armadura en las dos direcciones a partir del criterio anterior.

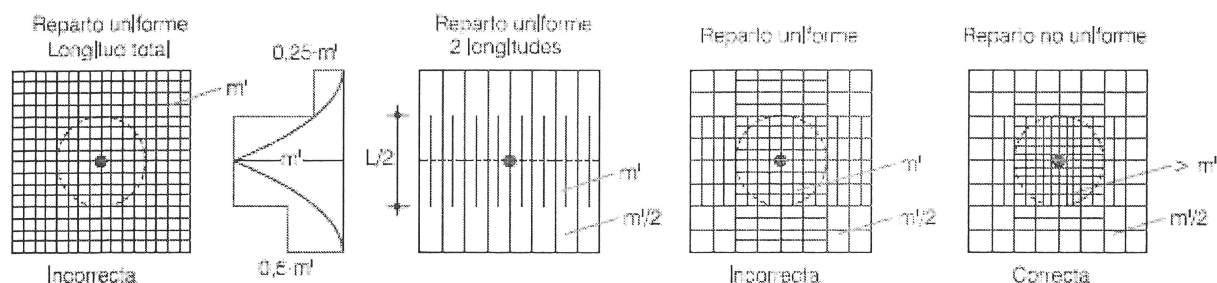


Figura 20. Correcciones de longitud y densidad

En la última se han movido de sitio alguna de las armaduras cortas en la periferia de la losa, pasándolas al interior, dando lugar a un reparto no uniforme, con el resultado de que en la zona inmediata al soporte, la densidad de de armado triplica a que hay justo al borde. Globalmente, la mitad interior tiene doble número de armaduras que la mitad exterior. La pregunta pendiente es cuales de las dos variantes, que tienen el mismo número de armaduras de la misma longitud, es válida.

Aquí el paso de viga a losa aporta nos depara otra sorpresa. La distribución uniforme resulta incorrecta. Incluso lo es si se dejara la longitud total de todas las armaduras. La capacidad del corte **X** lleva a la necesidad promedio definida por [10], pero no se puede disponer de manera uniforme en el corte.

Para probar ese aserto, bastará formular el equilibrio de cortes que involucren sólo la parte central de la losa, en las inmediaciones del soporte. Se trata de un tipo de corte absolutamente específico de losas, sin equivalente en vigas.

Si se considera un agotamiento por una línea intermedia entre la **X** y la **D**, sale un valor inferior a la obtenida para **X**, valor que sería el mismo si se adoptaran simultáneamente cuatro de ellas. La figura 20 caso **DD** muestra el resultado, que es el de una pirámide octogonal, eligiendo las líneas para que salga regular.

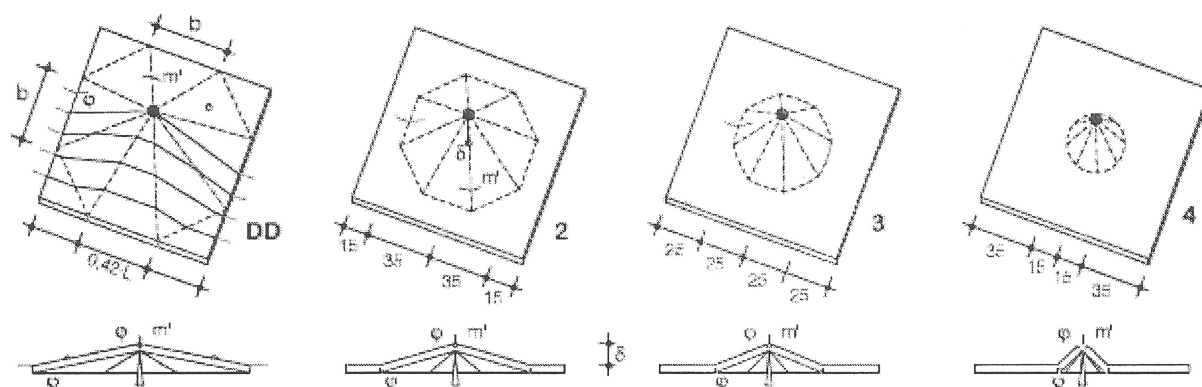


Figura 21. Cortes locales alrededor del soporte

Para plantear el trabajo de las líneas, utilizaremos el recurso, ya visto en 3.2, de la “proyección”. Puesto que todos los nervios entran y salen horizontales, es evidente que la suma de quebrantos de un signo en el interior, es igual a la que sucede de signo contrario en las acometidas. Se puede proceder pues a computar el trabajo de las líneas midiendo momento y giro en la base de la pirámide. El de una arista paralela a la dirección de uno de los nervios, es evidentemente $m \cdot b \cdot L \cdot \delta / 0,5 \cdot L$. El de las demás, por simetría, debe ser igual. Recuérdese que la capacidad de una cuadrícula es la misma en todas direcciones. Por tanto, la de las ocho aristas será ocho veces mayor.

El trabajo de la carga sobre el octógono procede de lo que descende la resultante en cada faceta, al ser triangulares, $0,67 \cdot \delta$, más lo que hay en las esquinas de la losa, que descenden δ .

Midiendo esas áreas en la figura, la ecuación de equilibrio es pues:

$$8 \cdot m' \cdot 0,42L \cdot \delta / 0,5 \cdot L = 0,83 \cdot p \cdot L^2 \cdot 0,67 \cdot \delta + 0,17 \cdot p \cdot L^2 \cdot \delta$$

$$\text{o sea} \quad 6,6 \cdot m' = 0,72 \cdot p \cdot L^2 \quad \rightarrow \quad m' = 0,11 \cdot p \cdot L^2$$

confirmándose que es inferior a [10]. Por ahora, el reparto uniforme parece ser plausible.

Pero tómese el caso 2 de esa figura. Consideraremos no un octógono sino un círculo. Ahora es:

$$2 \cdot \pi \cdot m'_2 \cdot 0,35 \cdot L \cdot \delta / 0,35 \cdot L = p \cdot L^2 \cdot (1 - \pi \cdot 0,35^2 / 3) \cdot \delta$$

o sea $6,3 \cdot m'_2 = 0,87 \cdot p \cdot L^2 \rightarrow m'_2 = 0,14 \cdot p \cdot L^2$

que supera [10]. Se confirma pues que el reparto uniforme no permite resistir la carga.

Si se toma el caso 3 sale:

$$2 \cdot \pi \cdot m'_3 \cdot \delta = p \cdot L^2 \cdot (1 - \pi \cdot 0,25^2 / 3) \cdot \delta \rightarrow 6,3 \cdot m'_3 = 0,93 \cdot p \cdot L^2 \rightarrow m'_3 = 0,147 \cdot p \cdot L^2$$

Que es mayor todavía. En el caso 4 es:

$$2 \cdot \pi \cdot m'_4 \cdot \delta = p \cdot L^2 \cdot (1 - \pi \cdot 0,15^2 / 3) \cdot \delta \rightarrow 6,3 \cdot m'_4 = 0,96 \cdot p \cdot L^2 \rightarrow m'_4 = 0,152 \cdot p \cdot L^2$$

Y en el límite, con un cono de radio infinitamente pequeño, sería

$$2 \cdot \pi \cdot m'_0 \cdot \delta = p \cdot L^2 \cdot \delta \rightarrow 6,3 \cdot m'_0 = p \cdot L^2 \rightarrow m'_0 = 0,159 \cdot p \cdot L^2$$

La conclusión es que no se puede armar la totalidad de la losa de manera uniforme, para una capacidad $m' = p \cdot L^2 / 8$ ($= 0,125 \cdot p \cdot L^2$), ya que la rotura crítica, la que demanda más, no es la de diedro sino la de cono, que llega a $0,159 \cdot p \cdot L^2$.

Parece pues que hay que optar entre disponer una armadura uniforme para $0,159 \cdot p \cdot L^2$ o, ya que eso se necesita en una zona minúscula, disponer el equivalente a $0,125 \cdot p \cdot L^2$, pero no de manera uniforme, concentrándola en torno al soporte (de la manera mostrada en la figura 20) para que en esa zona localmente, alcance $0,159 \cdot p \cdot L^2$, pero que se puede conseguir con armaduras cortas.

En términos simples, si se toma el cono 3, de radio la mitad de la luz, la necesidad en el interior es del orden de $m'_o = 0,150 \cdot p \cdot L^2$, que frente a $m' = 0,125 \cdot p \cdot L^2$, significa que hay que poner dentro 6/5 del valor medio. Eso quiere decir que fuera (m'_e) debe ponerse 4/5 del promedio. En otras palabras si se toma una frontera a mitad de luz, dentro debe haber como 6 y fuera como 4. En otras palabras, el 60% del total de las armaduras debe situarse en la mitad interior (véase figura 22). Con más rigor, como todos los conos contienen las partes más interiores, dentro debe ponerse *al menos* el 60%. Se puede concentrar más, pero no menos. Si densidad y longitud se mantienen proporcionales, como por corte en diedro, en la mitad exterior (véase figura 20), debe haber el 25%, en la mitad de fuera debe ponerse *al menos* el 25%. Hay margen pues para disponer entre 60%..40% y 75%..25%.

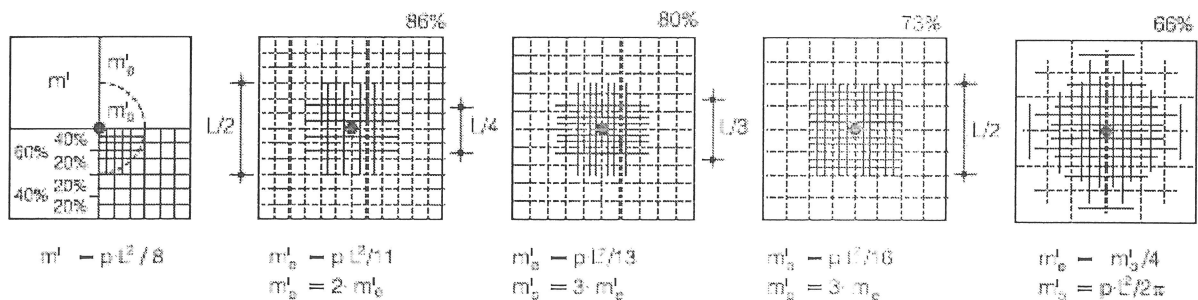


Figura 22. Reparto no uniforme de la armadura

Aunque se optara por el 60% tampoco puede disponerse de manera uniforme en la mitad interior. Debe concentrarse algo más cerca del soporte, ya que la densidad punta, justo en el centro, debe alcanzar $0,159 \cdot p \cdot L^2$. Una manera simple de atender a esta demanda, sería descomponer esa zona en dos, cada una del cuarto de la luz. El 60% se descompondría en 40%+20%, y el 40% exterior en 20%+20%. Con este sistema, la losa tendría una malla general para el 20% en cada cuarto, o sea el 0,8 del $0,125 \cdot p \cdot L^2$, y el resto se dispondría como refuerzo, en el cuarto central, eso sí con una longitud del 50% de la luz. En la figura 22 aparece esa solución etiquetada como la A. Una variante algo más eficaz puede ser disponer una malla para el 0,6 de $0,125 \cdot p \cdot L^2$, disponiendo el resto, como refuerzo mayor en el tercio de la luz (solución B). La C tiene una malla para el 0,5 de $0,125 \cdot p \cdot L^2$, y el resto como refuerzo en la mitad de la luz.

Cualquier otra que se plantee, y se pueden plantear muchas más, y sobre todo, con más densidades, debe mantener cubiertos todos los cortes en diedro, o sea los momentos flectores como ménsula (figura 20), y todos los conos (figura 21). Una de ellas, teóricamente mucho más ajustada, se muestra en la figura 22.D, pero con toda probabilidad, los costes de la complejidad de ejecución no compensan la reducción de volumen de armadura (su valor se muestra en % respecto a la teórica de $0,125 \cdot p \cdot L^2$ en toda la superficie).

Nótese que con losa sustentada en los bordes, apartado 3.2, se *pueden* disponer dos densidades y con ello se ahorra, y en este caso, de losa apoyada en el centro, se *deben* disponer dos densidades o hay un encarecimiento.

332 Carga puntual

Rotura en cono. Superficie contra perímetro. Variación del radio. Paradoja del tablero para silla redonda.

3.4 Sustentada en un punto. Lo mismo pero con reducción de carga, algo menos. Variación con el radio. Soporte grueso, modificación de la expresión, y de la ley. Radio crítico

3.5 Sustentación en dos bordes contiguos.

3.6 Sustentación en cuatro puntos, en más, en 8? Continuidad

4. Losas de edificios

4.1 Rotura en diedro.

4.2 Rotura en conos.

4.3 Otras roturas, muros

4.4 Armado. Formas simples

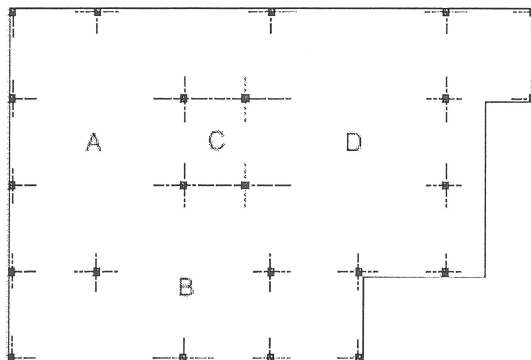
5. Patrón de roturas.

5.1 Losa cuadrada sustentada en líneas,

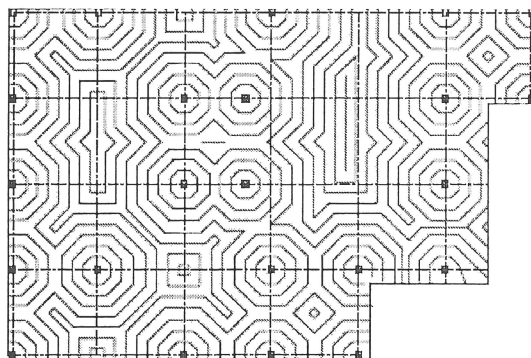
5.2 losa sustentada en puntos

5.3 Ejemplo del hotel en el caribe.

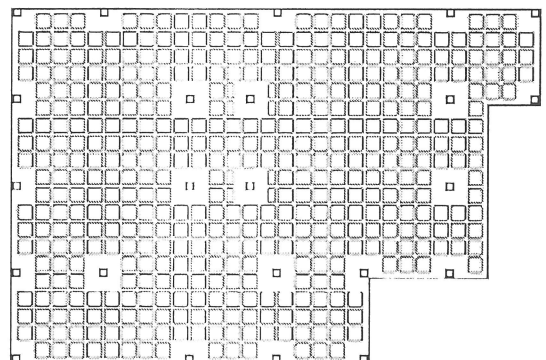
PLANTA



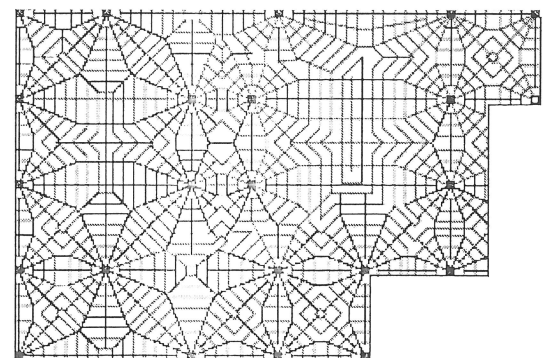
"Curvas de nivel"



PLANTA



"Curvas de nivel y líneas de pendiente"

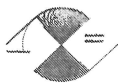


Anejos.

Losa mixta de cultural de Pinto

Informe de aparcamiento en Alcobendas

Losa de SAP



A: Estudiantes del Máster

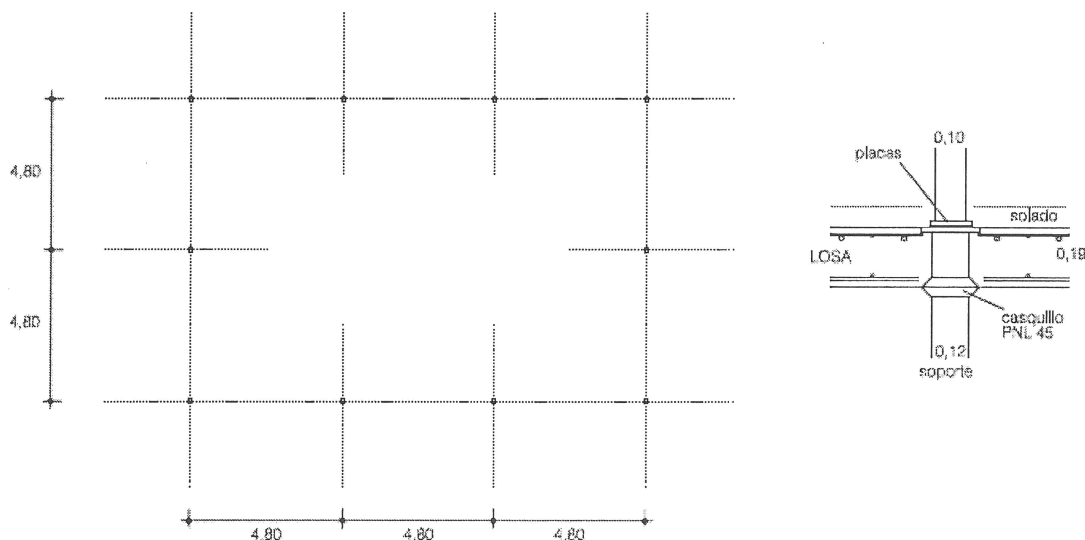
Asunto: Una estructura mixta

2 de marzo del 2011

Tenía pendiente conmigo mismo publicar alguna solución mixta de las que he hecho. Se ha alterado algo, para simplificar algunos puntos sucios. Pero en lo esencial es como se construyó.

1. Problema

Se trata de un centro cultural de municipio, que albergaba biblioteca, salas de estudio, y una sala de conferencias. En total baja más primera (aunque en parte de la planta tenía sótano). La planta procedía de considerar una cuadrícula de 4,8 m x 4,8 m, pudiendo disponer en cada encrucijada, un soporte. Pero en dos de los puntos no había soporte, dejando así un trozo de planta de 9,60 m x 14,40 m diáfano, para la sala de conferencias (véase figura). Encima había salas de seminario.



2. Soportes

Dada la pequeña carga por soporte, y la facilidad de disponer cruces, se optó por pilares de acero. Tanteando con 10 kN/m^2 , la carga por soporte sería de $10 \times 4,8 \times 4,8 = 230 \text{ kN}$ en planta alta y 460 kN en baja. El soporte mínimo de hormigón daría como para una compresión (sin mayorar) de $25 \times 25 \times 0,9 = 560 \text{ kN}$. Así que en efecto el soporte de acero podría resultar enormemente competitivo. De acuerdo con la tabla 4.1 del DAV-A, con 3,0 m de longitud de pandeo, 2UPN100 bastarían para 300 kN (planta alta), y 2UPN120 para 410 kN (planta baja). Los del perímetro de la sala podrían tener que subir a 2UPN140 que admiten 520 kN.

3. Tipo de forjado

De acuerdo con lo rudo del programa, público con cargas poco localizables, se optó por losa maciza. Por flecha no se podría bajar probablemente de $L/30$ o sea de $4,80/30 = 0,16 \text{ m}$ más $0,03 \text{ m}$ de recubrimiento, $0,19 \text{ m}$.

Dado que la superficie tributaria en planta por soporte es de unos 25 m^2 , a efectos de punzado, la sobrecarga de uso puede reducirse al 90%, por lo que la carga a estos efectos podría ser de unos 220 kN . Bastaría disponer en el soporte de 2UPN120, un casquillo descolgado, de angular de 45. En planta, la zona cargada es de $(12+6)^2 - 12^2 = 180 \text{ cm}^2$ que en hormigón HA25 da para $180 \times 1,2 = 220 \text{ kN}$. Como quedan 17 cm de canto útil a la arista del angular, el perímetro crítico es de $12 \times 4 + 6,28 \times 34 = 260 \text{ cm}$, lo que da una sección de $260 \times 17 = 4400 \text{ cm}^2$, que en hormigón HA25 da para $4400 \times 0,053 = 230 \text{ kN}$. (La tabla 4.4 del DAV-A ofrece el valor de 170 kN para casquillo al ras). Con los resultados definitivos, se dispondría estribos de punzado donde fuesen necesarios (sería más barato que cualquier otra opción).

4. Canto de la losa

Con 0,19 m de canto total, el peso propio sería de $4,75 \text{ kN/m}^2$, a la que añadiendo 1 kN/m^2 de solado, 1 kN/m^2 de tabiquería y 4 kN/m^2 de uso, arroja un total de **$10,75 \text{ kN/m}^2$** .

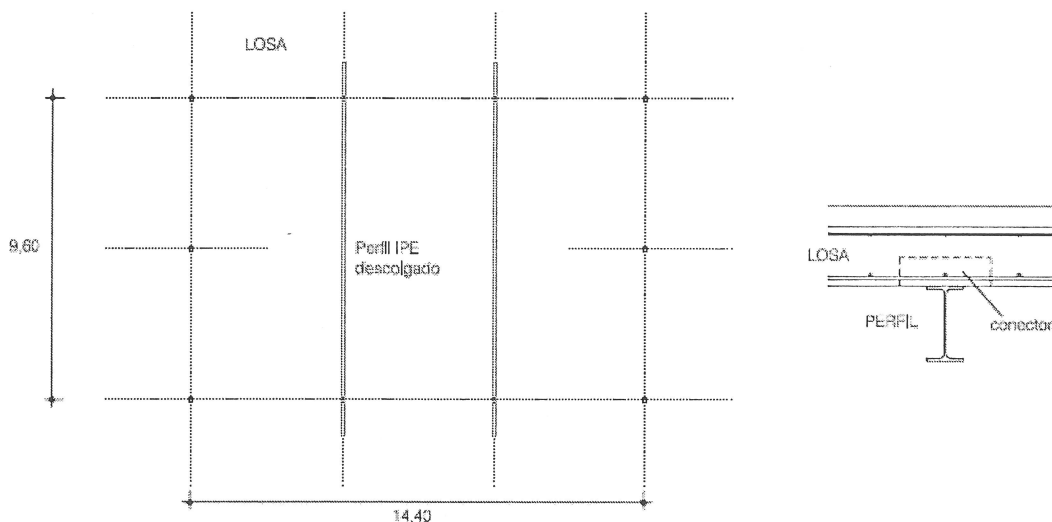
Con 4,8 m de luz, como momento positivo puede tomarse $q \cdot L^2 / 16 = 10,75 \times 4,8^2 / 16 = 15 \text{ mkN/m}$. Con un brazo de palanca de 0,15 m, se necesitaría una tracción de $15 / 0,15 = 100 \text{ kN/m}$. (Son valores sin mayorar). Para acero 500, sería $100 / 31 = 3,2 \text{ cm}^2/\text{m}$. Eso se cubre holgadamente con $\phi 10/0,20$ ($3,9 \text{ cm}^2/\text{m}$) y se puede armar con malla. En la parte superior hay que disponer armadura para que se cumpla $m^+ + m^- = Q / 2\pi$. O sea $m^- = 10,75 \times 4,8^2 / 6,3 - 16 = 39 - 16 = 23 \text{ mk/m}$. Con un brazo de palanca algo menor, de 0,14 m, la tracción sería de $23 / 0,14 = 164 \text{ kN/m}$ o sea $164 / 31 = 5,3 \text{ cm}^2/\text{m}$. Disponiendo una malla superior mínima de $\phi 6/0,20$ de $1,4 \text{ cm}^2/\text{m}$, se necesita un refuerzo local de $5,3 - 1,4 = 3,9 \text{ cm}^2/\text{m}$, que en $0,3 \times 4,8 = 1,4 \text{ m}$ de radio exigiría como $3,9 \times 2,8 = 11 \text{ cm}^2$, que se cubren con $6\phi 16$, que de acuerdo con las reglas publicadas, podrían tener **3,0 m** de longitud.

Como el canto útil es de 0,16 m, la sección estricta de acero inferior relativa a la de hormigón es de $3,4 / 100 / 16 = 0,002$ por lo que el canto mínimo para no calcular flecha es (apartado 3.8 del DA) de $L / 36 = 4,8 / 36 = 0,13 \text{ m}$.

En total habría en acero inferior, $0,78 \times 0,78 / 0,2 \times 2 = 6,1 \text{ kg/m}^2$. Arriba hay $0,78 \times 0,28 / 0,2 \times 2 = 2,2 \text{ kg/m}^2$ más la repercusión del refuerzo $6 \times 2 \times 1,54 \times 3/4,8^2 = 2,4 \text{ kg/m}^2$. En total $6,1 + 2,2 + 2,4 = 10,7 \text{ kg/m}^2$ (en buena concordancia con la tabla 6.3 del DA, que para luces de 4,9 y canto de 0,20 m da 12 kg/m^2). El coste total sería de $0,19 \times 60 + 10,7 = \mathbf{22,1 \text{ €/m}^2}$.

Con 0,20 m de canto total, el peso propio sería de $5,00 \text{ kN/m}^2$, a la que añadiendo las cargas citadas antes, el total es 11 kN/m^2 . Como momento positivo puede tomarse $11 \times 4,8^2 / 16 = 16 \text{ mkN/m}$. Con un brazo de palanca de 0,16 m, se necesitaría una tracción de $16 / 0,16 = 100 \text{ kN/m}$. o sea $\phi 10/0,20$. En la parte superior sería $m^- = 11 \times 4,8^2 / 6,3 - 16 = 40 - 16 = 24 \text{ mk/m}$. Con un brazo de palanca de 0,15 m, la tracción sería de $24 / 0,15 = 160 \text{ kN/m}$ o sea $160 / 31 = 5,2 \text{ cm}^2/\text{m}$. Disponiendo una malla superior mínima de $\phi 6/0,20$ de $1,4 \text{ cm}^2/\text{m}$, se necesita un refuerzo local de $5,2 - 1,4 = 3,8 \text{ cm}^2/\text{m}$, que en $0,3 \times 4,8 = 1,4 \text{ m}$ de radio exigiría como $3,8 \times 2,8 = 11 \text{ cm}^2$, que siguen siendo los mismos $6\phi 16$. La flecha sigue cumpliendo

Hay más hormigón y no baja el acero. En total habría en acero inferior, $0,78 \times 0,78 / 0,2 \times 2 = 6,1 \text{ kg/m}^2$. Arriba hay $0,78 \times 0,28 / 0,2 \times 2 = 2,2 \text{ kg/m}^2$ más la repercusión del refuerzo $7 \times 2 \times 1,12 \times 0,78 \times 3/4,8^2 = 2,8 \text{ kg/m}^2$. En total $6,1 + 2,2 + 2,8 = 11,1 \text{ kg/m}^2$. El coste total sería de $0,20 \times 60 + 10,7 = \mathbf{22,7 \text{ €/m}^2}$. El coste aumenta, (del orden del 5%, más o menos como los honorarios) por lo que no tiene sentido probar a subir el canto.



5. Perfil de refuerzo local

Menos de 0,19 m, contando con el clareo sobre la sala de conferencias, y zonas más cargadas, no parecía prudente, así que la decisión final fue mantener ese canto en la generalidad de la superficie.

Cambiar el grueso en el techo de la zona de la sala de conferencias obligaba a un engorro considerable de encofrado, apuntalado y ferralla, así que se tanteó reforzar la losa de 0,19 m con un perfil de acero descolgado. Si se dispone un perfil, solidarizado con la losa, en la luz corta, en las líneas en que falta el soporte, (figura anterior), se podrá contar con su capacidad como sección mixta, denominada M^- a momento negativo y M^+ a positivo.

Si, como indica la figura siguiente, se considera, de tanteo, un agotamiento en viga en la zona diafanizada, con luz doble que la de los módulos tipo, se debe verificar que:

$$(a \cdot m^- + M^-) + (a \cdot m^+ + M^+) = a \cdot q \cdot (2 \cdot a)^2 / 8$$

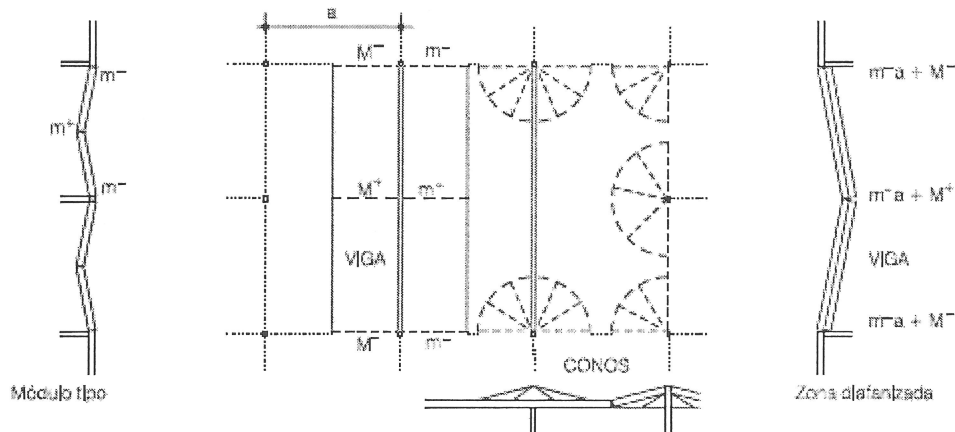
y como en el mismo tipo de agotamiento en el módulo tipo, debe darse que:

$$m^- + m^+ = q \cdot a^2 / 8$$

resulta:

$$M^- + M^+ = a \cdot 3 \cdot q \cdot a^2 / 8$$

que con $a = 4,8$ m y $q = 10,75$ kN/m² es $M^- + M^+ = 445$ mkN (módulo resistente $44500/18 = 2470$ cm³). De acuerdo con tablas publicadas, (UNED 1989), eso podría significar una IPE 300, por lo que se probará con perfiles como ese o inferiores, y con armaduras como las usadas en el módulo tipo o superiores.



Dado que el "circo" está rodeado por más de seis soportes, probablemente el agotamiento en cono no sea lo pésimo. De acuerdo con la figura, en ese caso, con un total de 4 conos completos, debería ser:

$$4(m^- + m^+) \cdot 2\pi R \cdot \delta / R + (4M^- + 4M^+) \cdot \delta / R = 6 \cdot q \cdot a^2 \cdot \delta$$

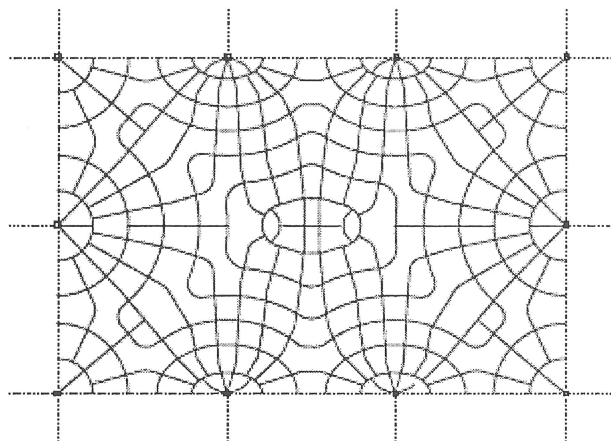
Contando con que en el mismo tipo de agotamiento del módulo tipo, debe darse que:

$$(m^- + m^+) \cdot 2\pi R \cdot \delta / R = q \cdot a^2 \cdot \delta$$

y suponiendo del lado seguro que la capacidad a momento negativo de las vigas mixtas sea sólo la mitad de la de momento positivo, y que el radio del cono no puede superar $a/2 = 2,4$ m, resulta:

$$6 \cdot M^+ = 2 \cdot q \cdot a^2 \cdot a/2$$

lo que conduce a $M^+ = 200$ mkN, que es un perfil francamente menor. La figura siguiente, que muestra el dibujo del "patrón de agotamiento" (con pendiente menor allí donde hay perfil), corrobora que el agotamiento crítico puede ser la "artesa"



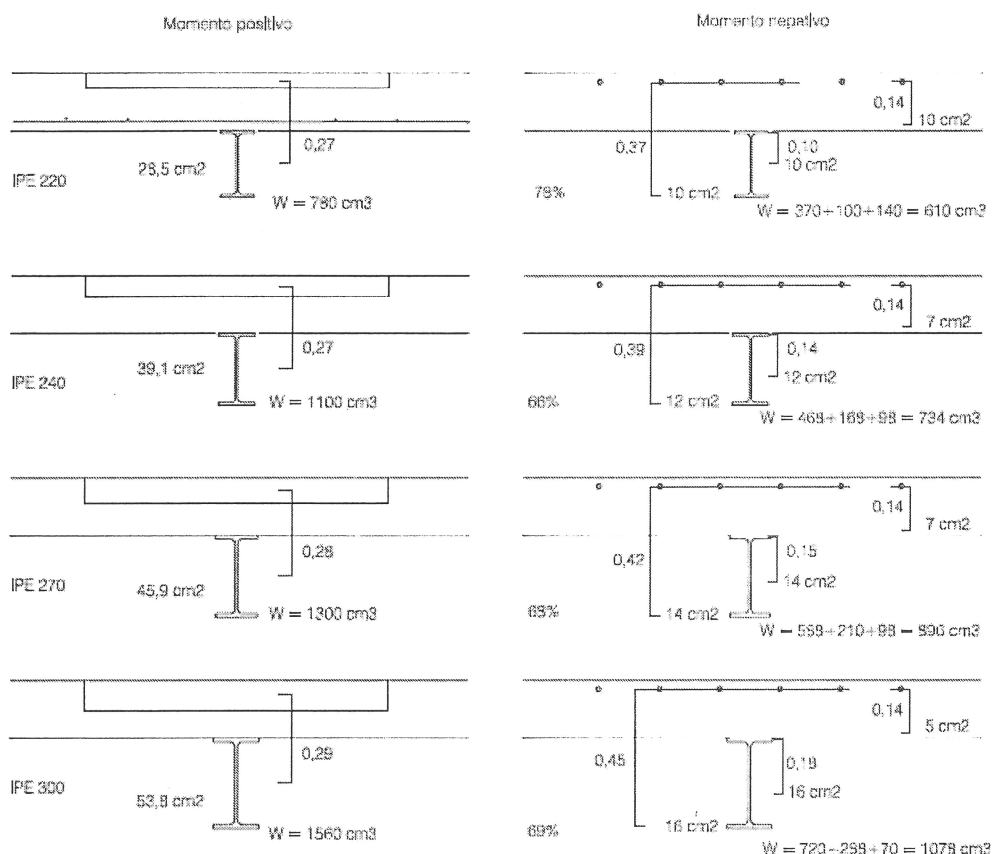
6. Capacidades resistentes

A los efectos de los cálculos por líneas de rotura, se parte pues, de considerar como valores de capacidad:

Malla superior $\phi 6/0,20 = 1,4$ cm ² /m;	$z = 0,14$ m;	$m_o = 1,4 \times 31 \times 0,14 = 6,1$ mkN/m
Refuerzo superior $6\phi 16 = 12$ cm ²	$z = 0,14$ m;	$M^- = 12 \times 31 \times 0,14 = 52$ mkN
Malla inferior $\phi 10/0,20 = 3,9$ cm ² /m;	$z = 0,15$ m;	$m^+ = 3,9 \times 31 \times 0,15 = 18,1$ mkN/m

Para la viga mixta, a momento positivo, la capacidad, ver figura siguiente, se obtiene como producto de la sección del perfil, por la resistencia del acero, por la distancia a la resultante de tensiones del hormigón, con igual capacidad que la del perfil. Por simplicidad (los valores no son sensibles a ese dato), se ha supuesto un ancho superior de 1,00 m, y una tensión segura del hormigón de 1 kN/cm^2 .

A momento negativo, hay que considerar la existencia del refuerzo de $6\phi 16$. Del lado seguro, la capacidad se obtiene multiplicando la capacidad de los redondos que hacen par con el alma, por la distancia entre ambos elementos, más la del alma superior por la distancia al centro del alma que forma para (sin superar el 75% de la altura porque el perfil IPE dejaría de ser plástico), más lo que no haya sido utilizado de las armaduras de refuerzo por la distancia al hormigón inferior de la losa.



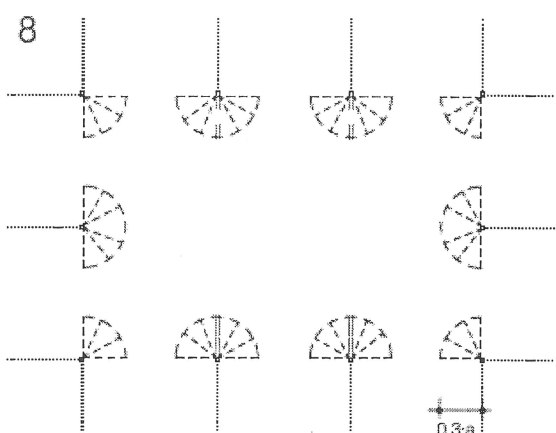
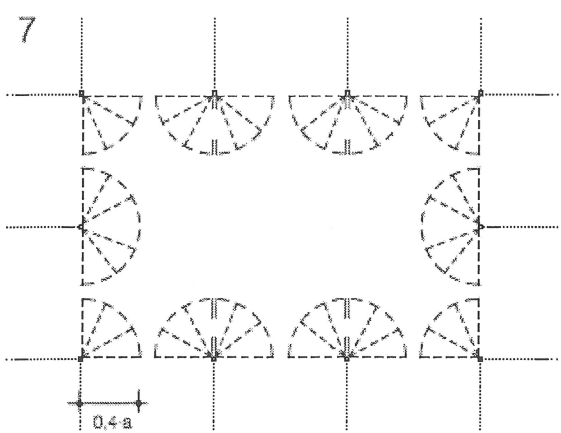
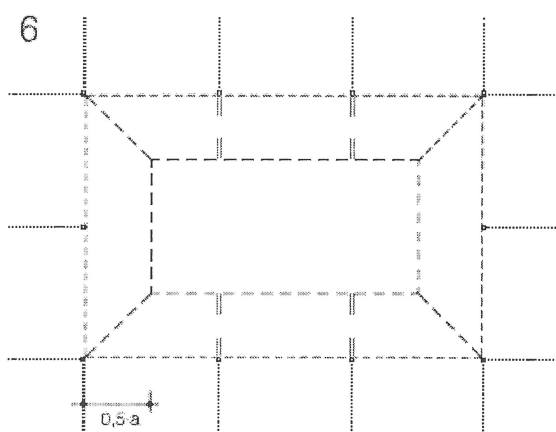
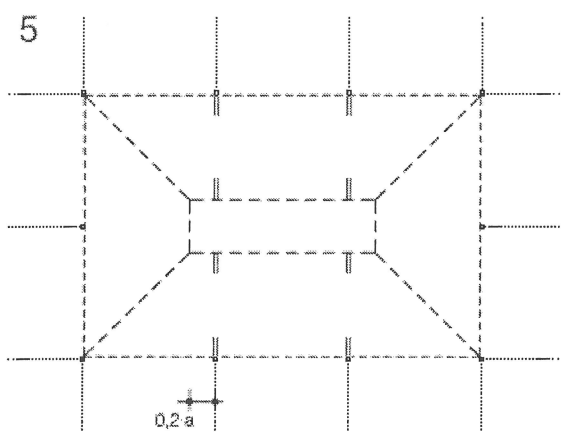
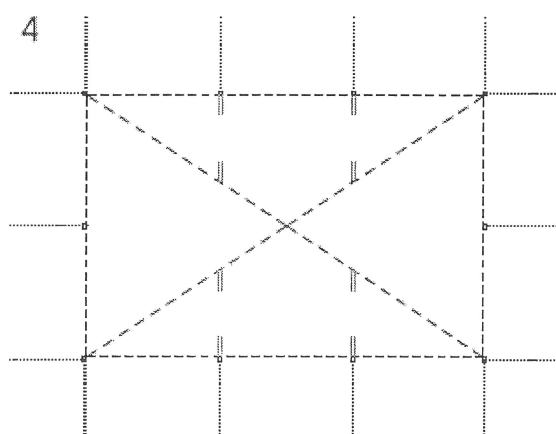
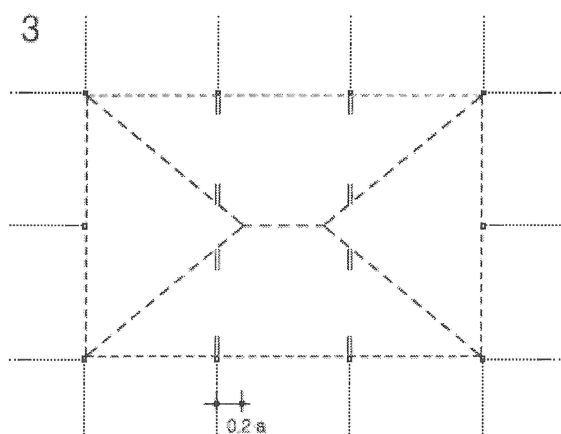
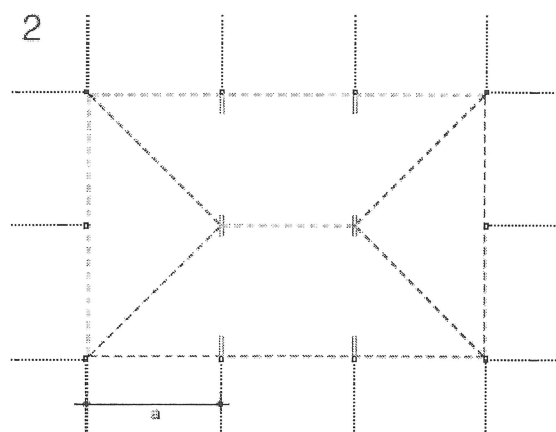
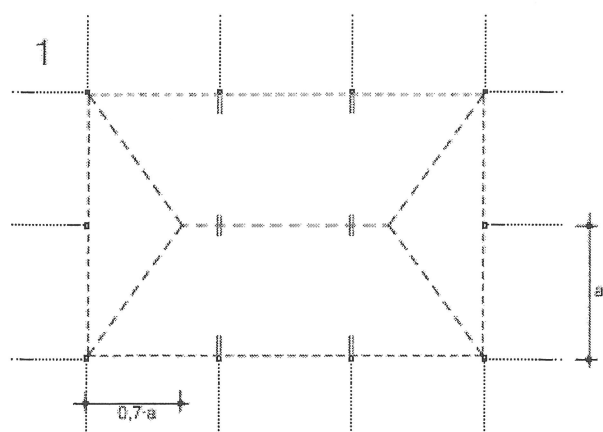
A partir de los módulos resistentes (se constata que son del orden de magnitud de los valores tabulados, UNED 1989, tablas 5 y 8), se obtienen los siguientes valores de capacidad:

			Mixtas-UNED 1989
Perfil IPE 220: 26,2 kg/m	momento negativo	$M^- = 610 \text{ cm}^3 \times 18 \text{ kN/cm}^2 = 110 \text{ m kN}$	[550 cm ³]
	momento positivo	$M^+ = 780 \text{ cm}^3 \times 18 \text{ kN/cm}^2 = 140 \text{ m kN}$	[750 cm ³]
Perfil IPE 240: 30,7 kg/m	momento negativo	$M^- = 734 \text{ cm}^3 \times 18 \text{ kN/cm}^2 = 135 \text{ m kN}$	[650 cm ³]
	momento positivo	$M^+ = 1100 \text{ cm}^3 \times 18 \text{ kN/cm}^2 = 200 \text{ m kN}$	[950 cm ³]
Perfil IPE 270: 36,1 kg/m	momento negativo	$M^- = 896 \text{ cm}^3 \times 18 \text{ kN/cm}^2 = 160 \text{ m kN}$	[820 cm ³]
	momento positivo	$M^+ = 1300 \text{ cm}^3 \times 18 \text{ kN/cm}^2 = 235 \text{ m kN}$	[1100 cm ³]
Perfil IPE 300: 42,2 kg/m	momento negativo	$M^- = 1078 \text{ cm}^3 \times 18 \text{ kN/cm}^2 = 195 \text{ m kN}$	[950 cm ³]
	momento positivo	$M^+ = 1560 \text{ cm}^3 \times 18 \text{ kN/cm}^2 = 280 \text{ m kN}$	[1300 cm ³]

7. Análisis por líneas de rotura

Como formas de agotamiento se exploran las de la figura siguiente. Dado que la zona es un "circo" rodeado por más de cuatro soportes, se probará con agotamientos globales.

El caso 1 es el de cuatro aguas sin llegar a afectar a los perfiles. El 2 les afecta justamente. El 3 llega más profunda pero no al centro. El 4 es cuatro aguas diagonal. El 5, en artesa, deja un plano pequeño, y la 6 uno ya muy extenso. El 7 se retrae a conos de radio amplio. El 8 es con conos pequeños (Se supone, del lado de la seguridad, que los otros medios conos se ocupan de los módulos tipo)



El proceso de análisis por líneas de rotura se podría sistematizar de la manera siguiente:

Trabajo de la líneas (m·L · φ)		Caso	1	2	3	4	5	6	7	8
Negativas										
Borde largo	$m_o \cdot 3 \cdot a \cdot 2$		δ/a	δ/a	δ/a	δ/a	$\delta/0,8 \cdot a$	$\delta/0,5 \cdot a$	$m_o \cdot 3 \cdot \pi R \cdot 2 \delta/R$	
Borde corto	$m_o \cdot 2 \cdot a \cdot 2$		$\delta/0,7 \cdot a$	δ/a	$\delta/1,2 \cdot a$	$\delta/1,5 \cdot a$	$\delta/0,8 \cdot a$	$\delta/0,5 \cdot a$	$m_o \cdot 2 \cdot \pi R \cdot 2 \delta/R$	
Refuerzos largo	$M^- \cdot 2$		δ/a	δ/a	δ/a	δ/a	$\delta/0,8 \cdot a$	$\delta/0,5 \cdot a$	$M^- \cdot 2 \cdot \delta/R$	
Refuerzos corto	$M^- \cdot 4$		$\delta/0,7 \cdot a$	δ/a	$\delta/1,2 \cdot a$	$\delta/1,5 \cdot a$	$\delta/0,8 \cdot a$	$\delta/0,5 \cdot a$	$M^- \cdot 4 \cdot \delta/R$	
Vigas	$M^- \cdot 2$		δ/a	δ/a	δ/a	δ/a	$\delta/0,8 \cdot a$	$\delta/0,5 \cdot a$	$M^- \cdot 2 \cdot \delta/R$	
Positivas										
Proyección largo	$m^+ \cdot 3 \cdot a \cdot 2$		δ/a	δ/a	δ/a	δ/a	$\delta/0,8 \cdot a$	$\delta/0,5 \cdot a$	$m^+ \cdot 3 \cdot \pi R \cdot 2 \delta/R$	
Proyección corto	$m^+ \cdot 2 \cdot a \cdot 2$		$\delta/0,7 \cdot a$	δ/a	$\delta/1,2 \cdot a$	$\delta/1,5 \cdot a$	$\delta/0,8 \cdot a$	$\delta/0,5 \cdot a$	$m^+ \cdot 2 \cdot \pi R \cdot 2 \delta/R$	
Vigas	$M^+ \cdot 2$		δ/a	δ/a	δ/a	δ/a	$\delta/0,8 \cdot a$	$\delta/0,5 \cdot a$	$M^+ \cdot 2 \cdot \delta/R$	
Trabajo de la carga (q·δ · S)										
Rectangular	$q \cdot \delta/2$		$3,2 \cdot a^2$	$2 \cdot a^2$	$1,2 \cdot a^2$	--	$2,88 \cdot a^2$	$3,0 \cdot a^2$	--	
Triangular	$q \cdot \delta/3$		$2,8 \cdot a^2$	$4 \cdot a^2$	$4,8 \cdot a^2$	$6,0 \cdot a^2$	$2,56 \cdot a^2$	$1,0 \cdot a^2$	--	
Plano	$q \cdot \delta$		--	--	--	--	$0,56 \cdot a^2$	$2,0 \cdot a^2$	$6 \cdot a^2$	
Conos	$q \cdot 2\delta/3$		--	--	--	--	--	--	$-4 \cdot \pi \cdot R^2$	

Al tratarse de agotamiento global de una superficie de casi 100 m², como sobrecarga de uso puede tomarse el 70% del valor nominal, o sea 2,8 kN/m², por lo que la carga total es q = 9,55 kN/m².

Sustituyendo los valores, y como $M^- \approx 0,7 \cdot M^+$, queda:

Trabajo de la líneas		Caso	1	2	3	4	5	6	7	8
Negativas									R=1,9	R=1,4
Borde largo			36,6	36,6	36,6	36,6	42,0	73,2	115	115
Borde corto			34,1	24,4	20,3	16,3	30,5	48,8	78	78
Refuerzos largo			21,8	21,8	21,8	21,8	27,0	43,7	54,7	74,3
Refuerzos corto			62,4	43,7	35,4	29,1	54,1	87,4	109	148
Vigas	M		0,29	0,29	0,29	0,29	0,36	0,59	0,7	1,0
Positivas										
Proyección largo*			109	109	109	109	136	218	341	341
Proyección corto			101	72	59,8	48,0	90	144	227	227
Vigas	M		0,42	0,42	0,42	0,42	0,52	0,84	1,05	1,40
Trabajo de la carga										
Rectangular			350	219	131	--	315	328	--	--
Triangular			205	293	352	439	188	73,1	--	--
Plano			--	--	--	--	123	440	1320	1320
Conos			--	--	--	--	--	--	-289	-157
Total: líneas			362	307	283	260	380	615	924	953
	M		0,71	0,71	0,71	0,71	0,88	1,43	1,75	2,4
carga			555	512	483	439	626	841	1031	1163
M =			271	288	281	252	279	160	61	87 mkN

8. Cálculo del perfil

Se comprueba que la condición de conos no es decisiva. Y en artesa, el caso 2, 3 y 5 dan resultados similares, con diferencias muy inferiores a cualquier salto de perfil o armadura.

Se confirma igualmente que sin cambios en la armadura de la losa hay que disponer un perfil IPE300 (momento positivo de mixta 280 mkN). Revisando los valores, la armadura más eficaz (la que más aporta en la suma en relación con su costo) es la inferior, y en valor absoluto la paralela a los perfiles (línea señalada con *)

De acuerdo con los cálculos del apartado 6, el perfil opera con 0,27 m de brazo de palanca, y la armadura de losa con sólo 0,15 m. Pero contando con que la resistencia está en relación 275/500, y que el coste del kg de acero en perfil a redondo está en 1,5:1 aumentar la armadura de losa es más rentable que aumentar el perfil.

En efecto, si se dispone una IPE 300, con 42,2 kg/m, la repercusión es de 1012/138 = 7,3 kg/m².

Si se duplica la armadura indicada como más eficaz, intercalando otro φ10 entre cada dos (o aumentando a φ12/0,15), los valores de la línea señalada con asterisco se duplican. La condición (caso 2) es pues 512 = 307+109+0,71M, por lo que bajando la capacidad del perfil necesario a **135 mkN**, para lo que valdría una IPE220

que tiene 26,2 kg/m o sea 4,0 kg/m² de repercusión. En resumen, se ponen 3 kg/m² más de los que cuestan 1 €/kg y se quitan 3,3 kg/m² de los que cuestan 1,5 €/kg. Compensa.

Considerando que el agotamiento en viga corresponde a un área tributaria de una banda de sólo 46 m², la sobrecarga de uso sería superior a la considerada, y demandaría un salto de perfil.

Como conclusión, se adoptó un perfil **IPE 240**.

9. Otras comprobaciones

a. armado transversal

De perfil a perfil, la armadura es escasa. La condición, en agotamiento local de viga transversal a ambos, sería:

$$m_o + m^+ < q \cdot a^2 / 8$$

Este caso, la sobrecarga a considerar es la total, $q = 10,75 \text{ kN/m}^2$. Como luz se puede tomar la neta, restando a 4,8 m el grueso del ala del perfil, resultando $a = 4,68 \text{ m}$, por lo que:

$$6,1 + 18,1 < 29,4$$

de manera que falta una capacidad de 5,2 mkN/m, siendo suficiente $\phi 10/0,40$. Siendo carga uniforme, y pudiendo solaparse con la malla, bastará que tenga una longitud del 25% de la luz, o sea de 2,4 m de longitud.

b. flecha

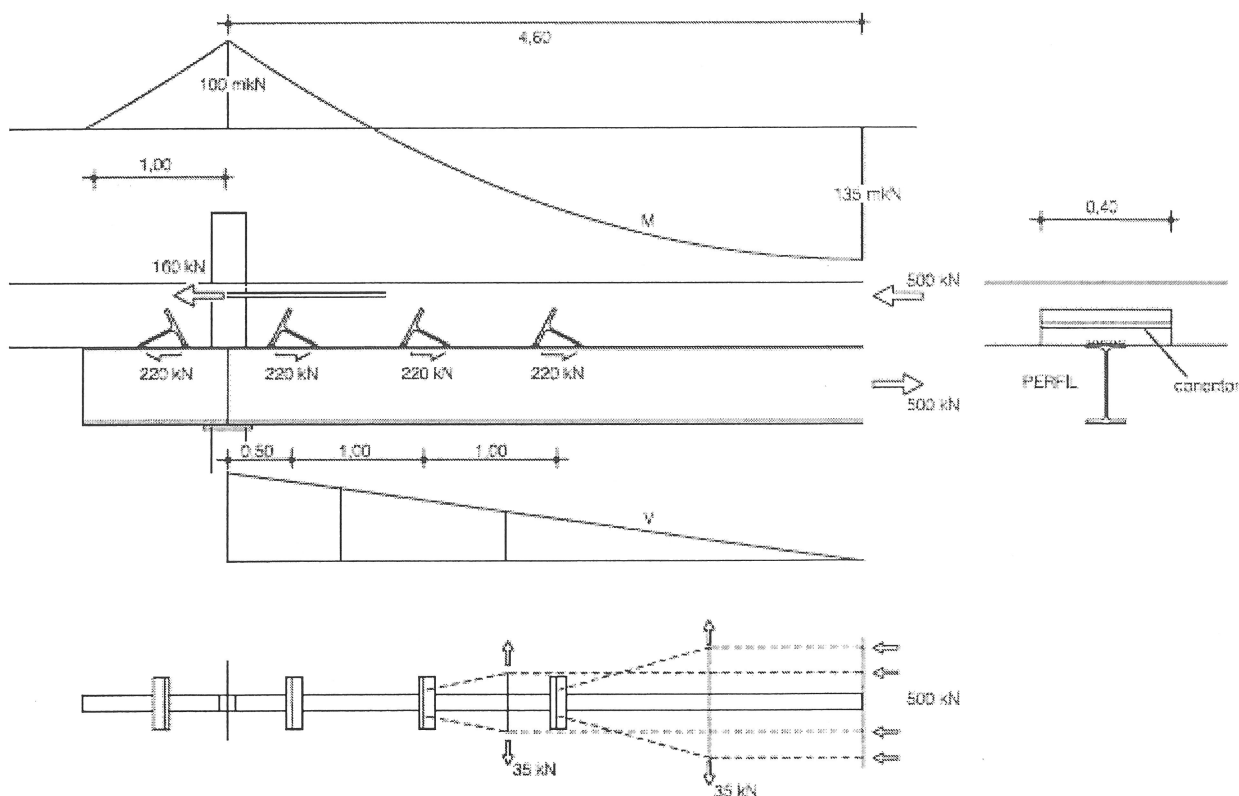
La esbeltez de la viga mixta resulta de $9,6/(0,19+0,24) = 22$. De acuerdo con "De Re Calculi" Apartado A.5, la expresión de comprobación¹ de flecha es

$$L / h_{\text{tot}} < 25$$

por lo que cumple.

c. conexión

De acuerdo con lo deducido en la obtención de la capacidad resistente de la viga mixta, del lado seguro, en la sección de momento máximo de vano, con un brazo de palanca de 0,27 m, el momento obtenido de 135 mkN se traduce en una compresión de hormigón de $135/0,27 = 500 \text{ kN}$. (Véase la figura adjunta, a dos escalas)



¹ Nunca conviene usar las expresiones de flecha en función de EI , que corresponden al descenso ante una carga cualquiera, mientras flecha es el descenso ante la carga que debe soportar. Ese tipo de expresión es la misma que se ha usado ya para la comprobación resistente, añadiendo el término L/h , por lo que sustituyendo, la expresión de comprobación de flecha es siempre del tipo "esbeltez menor que K "

En el extremo, con el máximo momento negativo, la parte de armaduras aportan el 62% del momento, o sea 62 mkN, que con un brazo de palanca de 0,39 m significa $62/0,39 = 160$ kN.

Separando la cabeza de hormigón del perfil, por equilibrio, la conexión debe dar cuenta de un total de $500+160 = 660$ kN. En este caso la conexión es directa entre hormigón y perfil, por lo que no son demasiado útiles los conectores de vástago. Lo más eficaz es usar despuntes del mismo perfil del usado en la viga, tal como indica la figura y traerlos soldados de taller.

Por soldadura, cada casquillo, con dos cordones de 10 mm de ancho de garganta, tomando, aproximadamente 10 kN/cm^2 para la soldadura, puede dar de sí para unos $2 \times 12 \times 1 \times 10 = 240$ kN, por lo que basta disponer 3 casquillos en cada media luz. En la parte embebida por fuera de la luz, bastará disponer uno.

En cuanto a frente de hormigón comprimido, para los 660 kN se necesitan del orden de 660 cm^2 . A razón de 6 cm de altura eficaz del conector, se necesitarían 110 cm de longitud, por lo que los tres se disponen de 0,40 m.

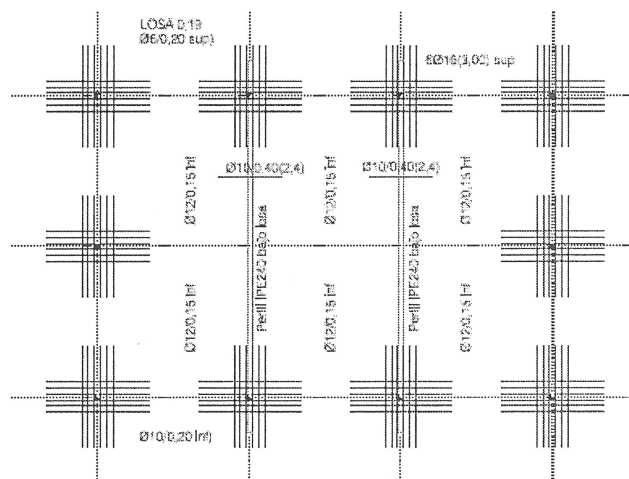
Falta la conexión a rasante entre las alas y el nervio. De los 660 kN, que se desarrollan en aproximadamente 1 m de ancho, como se supuso en el apartado 6, se puede suponer que deben pasar unos 300 kN por tensión tangencial de cada ala al nervio. Y tienen para ello del orden de $480 \times 19 = 9120 \text{ cm}^2$ por lo que dicha tensión tangencial es $300/91200 = 0,03 \text{ kN/cm}^2$, perfectamente soportable por el hormigón. No obstante la existencia de $\phi 10/0,20$ inferior, permite movilizar una tracción de $0,78 \times 4,80 \times 5 \times 31 = 5808$ kN, por lo que es más que de sobra, aun despreciando toda la capacidad del hormigón.

Otra manera de cuantificar esa necesidad de conexión, en forma de tracción es la de dibujar en planta el quiebro de trayectoria de la fuerza de 500 kN que tiene que ir a parar a los conectores. (véase figura). Como puede comprobarse apenas exige 70 kN en 3,60 m por lo que sobraría con $0,6 \text{ cm}^2/\text{m}$, y hay bastantes más disponibles.

10. Conclusión

La conclusión de los cálculos precedentes es que, a la losa tipo, armada con malla de $\phi 10/0,20$ inferior, $\phi 6/0,20$ superior, y $6\phi 16(3,00)$ en ambas direcciones sobre soportes, en la zona clareada basta disponer dos perfiles de IPE240, prolongados 1,20 m en el tramo sucesivo, pasando la armadura inferior paralela al perfil a $\phi 12/0,15$ (o intercalar otro $\phi 10/0,20$), y $\phi 10/0,40$ transversales superiores.

El perfil necesita llevar soldados 3 conectores por vano, y uno en la prolongación de $\frac{1}{2}$ IPE240 de 0,40 m de longitud, el primero a 0,5 m del soporte, y los otros dos a 1 m del anterior¹.



Se concluye que la solución mixta de losa de hormigón y soporte de acero puede ser rentable. La losa mixta de perfil y hormigón probablemente no lo sería como solución general, pero sí como recurso local para un punto anómalo.

jose . demiguel @ gmail . com

¹ En la memoria del proyecto se mencionó, sólo de pasada, que se había aplicado cálculo plástico. Lo del soporte de acero se decidió por experiencia previa. Canto y armado de módulo tipo se sacaron del DA-EHE. Para la viga mixta se partió de un incremento de armadura, y se calculó sólo el Caso 2 (cuatro aguas a 45°) y el 4 (diagonal). Capacidad mixta, número y separación de conectores, rasante y flecha se dedujeron de la publicación de la UNED-1989. Escribir esto ha llevado diez veces más tiempo.

APARCAMIENTO SUBTERRÁNEO CON FORJADO RETICULADO ALCOBENDAS. MADRID

ANEJO

1. Elemento analizado

El elemento representativo del análisis del forjado es el que se muestra en la figura 1 en planta. Se trata de un tramo tipo de 7,45 m de luz entre ejes de soportes, formado por tres crujiás, las laterales de 4,65 m entre soportes y cara interior de muros, y la central de 6,20 entre ejes de muros. El elemento se completa con el tramo testero de 4,90 m entre ejes de soportes y cara de muro.

En torno a cada soporte, de 0,30 x 0,70 m de sección, se dispone un ábaco macizo de 3,20 x 3,80 m aproximadamente, ocupando un número entero de casetones, y centrado con el soporte. En derredor se disponen casetones cuadrados de 0,80 m de modulación. Debido a que las luces no son múltiplo del periodo del casetón, se intercalan nervios de ancho adicional, para restituir en cada eje la posición relativa del aligeramiento¹.

Al llegar al muro, se deja un margen amplio entre los casetones y su cara.

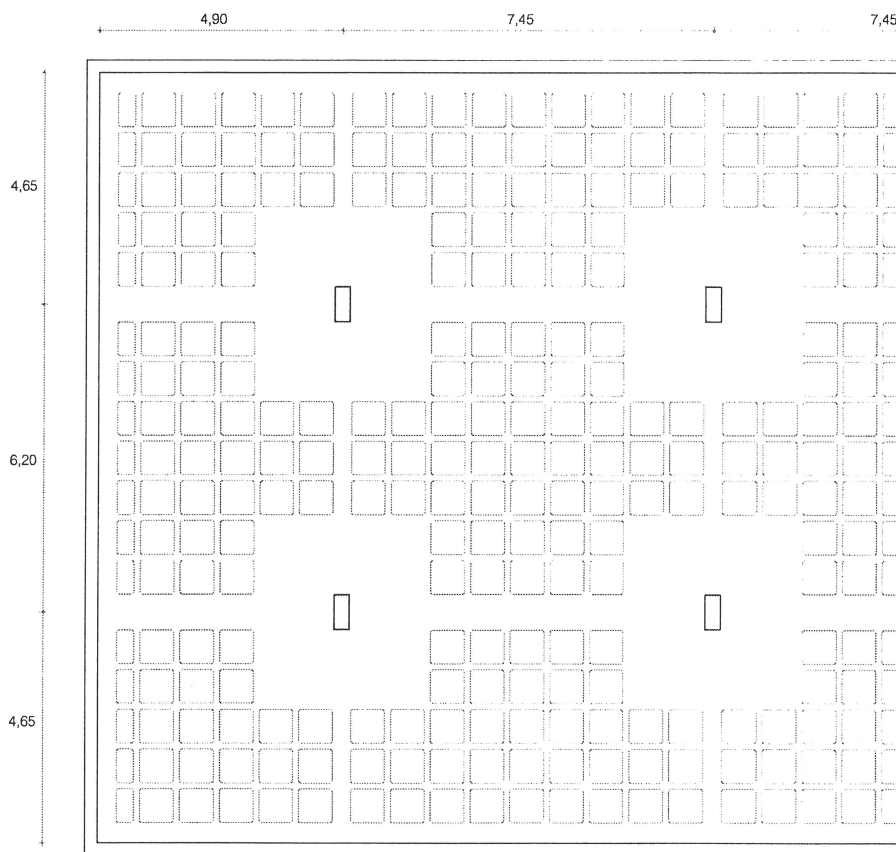


Figura 1. Planta general

La sección tipo se muestra en la figura 2. Según proyecto, el canto total es de 0,30 m, con una capa de compresión o losa superior corrida de 0,05 m. El ancho teórico inferior, que sólo entra en los cálculos de peso, se estima, de acuerdo con los datos existentes en 0,12 m. Con los recubrimientos típicos, el canto útil se estima en 0,27 m, el brazo de palanca a flexión en 0,23 m para momentos positivos (los que traccionan la cara inferior), y 0,22 m los negativos (que traccionan la superior)

¹ Es un recurso de mucho valor que ha caído en desuso, cuando el que dispone el aligeramiento es un programa.

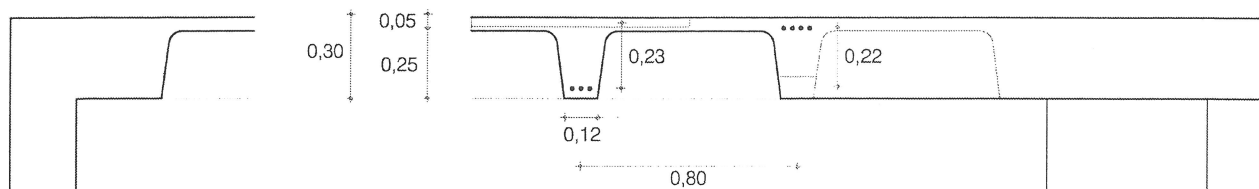


Figura 2. Sección del forjado

De acuerdo con los planos de proyecto, la armadura es la que se representa en la figura 3, aunque algunos detalles, en cuanto a cómo subsiste alguno de los armados más largos de cada nervio al llegar al extremo, aparecerán posteriormente. Puede observarse que la organización es metódica, racional, y repetitiva. En general, cada paño en cada dirección se arma disponiendo sólo dos o tres tipo de redondos¹. El plano original disponía sólo la armadura en los nervios que, en el orden de lectura, cambiaban respecto al anterior, y en planos separados la de una dirección y otra, por lo que resultaba difícil encontrar el patrón.

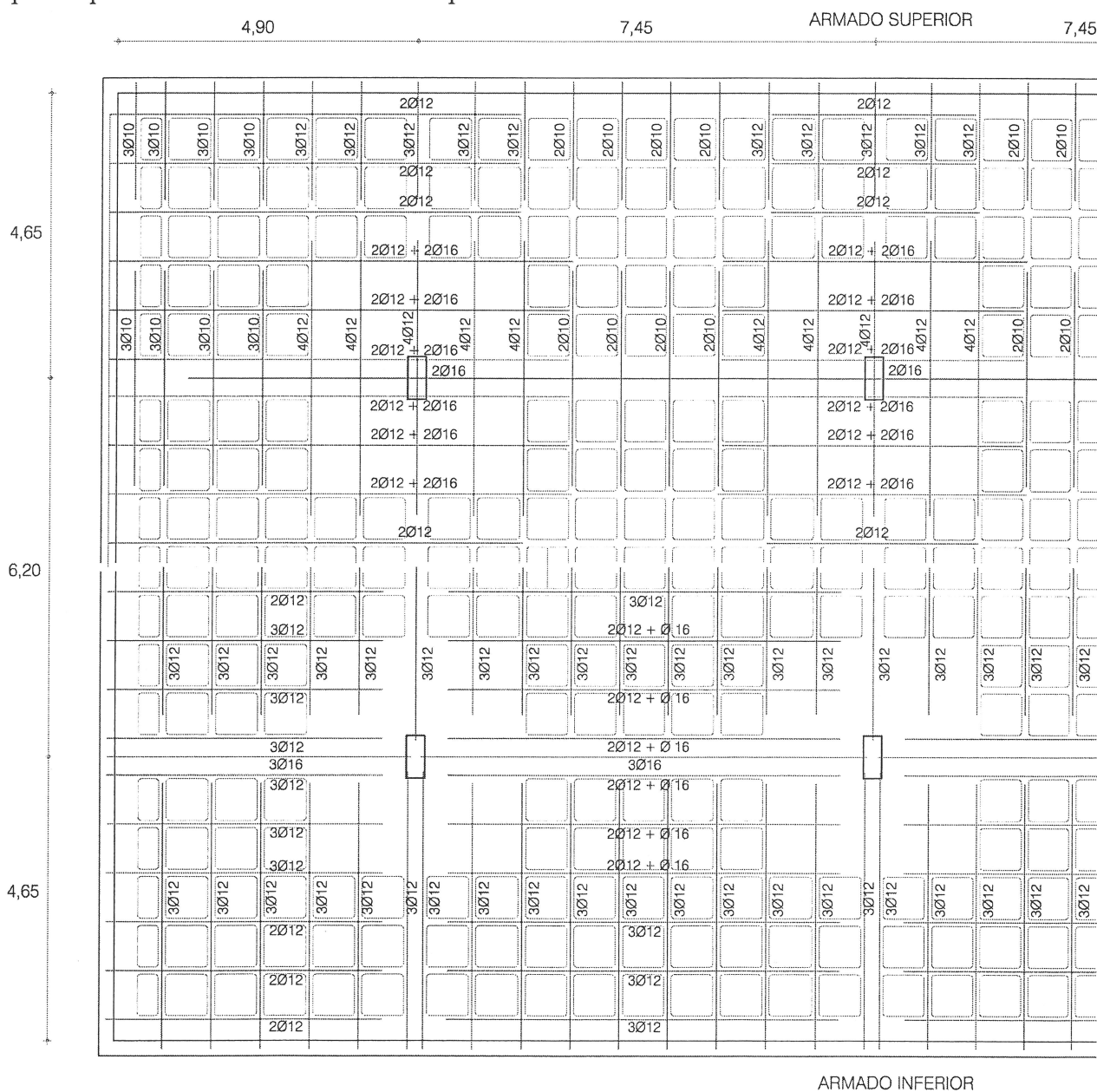


Figura 3. Armado existente según proyecto

¹ Este sistema da lugar a una mayor repercusión de acero, pero dispuesto de manera más simple, lo que reduce los costes indirectos, y la probabilidad de errores en obra. Procede de cuanto se armaba a mano; en la actualidad las salidas de programa suelen ser mucho más caóticas, casuales, propendiendo a errores, pero paradójicamente no consiguen ahorros significativos en cantidad de acero.

2. Acciones, materiales y seguridad

El proyecto original preveía hormigón H175. Debido a que los cálculos de flexión se hacen en base al brazo de palanca, se puede prescindir de la resistencia del hormigón.

Como acero, se adoptó el B500, cuyas características resistentes siguen, hoy día, vigentes.

Como acciones, verticales, en proyecto se adoptó una carga total de 9 kN/m^2 (entre peso propio, solado, y 4 kN/m^2 que era la sobrecarga de uso reglamentada en su tiempo).

A los efectos del objetivo de este informe se considera inicialmente un peso propio general de $3,4 \text{ kN/m}^2$, en de la parte aligerada, más $2,9 \text{ kN/m}^2$ adicionales en los macizados, y una sobrecarga de uso, que, según CTE, está formada por una uniforme de 2 kN/m^2 más una carga de 20 kN (formada por dos de 10 kN separadas $1,8 \text{ m}$) en uno cualquiera de los puntos de la planta. Según muestra la figura 5, para una luz tipo de entre las consideradas, ponderando cada componente con el coeficiente de seguridad $1,35$ o $1,5$ según proceda, se obtiene el mismo momento que el que provendría de considerar una carga total de $7,3 \text{ kN/m}^2$ con una seguridad de $1,4$. La diferencia entre la carga que sea capaz de soportar la estructura y ese valor será el margen de incremento de peso que puede añadirse a lo existente.

Para simplificar los cálculos, todos los de este documento se hacen con acciones procedentes de valores característicos, introduciendo en la resistencia de los materiales sus coeficientes de seguridad, y adicionalmente $1,4$ por acciones, que es el nivel de seguridad usado como referencia, tanto para obtener la carga máxima como para el margen buscado como diferencia entre la existente y con la que se llegaría al límite de capacidad de carga, que es el resultado que se busca.

Para acero B500 la tensión segura es pues $f = 50 \text{ kN/cm}^2 / 1,15 / 1,4 = 31 \text{ kN/cm}^2$

3. Análisis como viga: dirección X

La comprobación más sencilla del forjado es la procedente de considerarlo como viga en una dirección. A estos efectos se toma un trozo del forjado, en un ancho arbitrario. Si los trozos a ambos lados del mismo tienen un comportamiento a flexión similar, tanto dará considerarlo sólo como en conjunto con ellos. Si tienen un comportamiento más favorable, lo que se obtenga como capacidad de carga tras analizarlo, será un valor pesimista, toda vez que, junto con ellos, sería más resistente.

Como viga en dirección X se considera el conjunto de nervios a ambos lados de la línea de soportes, en una amplitud total de $6,20 \text{ m}$ (véase figura 4). De acuerdo con la planta general, esta "viga", estaría flanqueada por un lado por otro igual, y por el otro, por algunas líneas de aligeramiento más el muro. Dado que el muro inhibe la flexión considerada, los resultados serán pesimistas: no resiste sólo hasta lo obtenido, sino más.

En el sentido de la luz se considera el tramo tipo, en continuidad consigo mismo, y con el paño testero del muro. Para este proceso, se anota, en cada nervio, la sección resistente eficaz que posee a intervalos arbitrarios, que, por facilidad, se han tomado con la cadencia de los nervios, considerando que en los extremos debe anularse por anclaje. En la figura 4 aparecen los resultados. En cuanto a armado inferior, los nervios son de los tipos A, B o C, y en el superior D, E y F.

Posteriormente se anota, como propiedad de la viga considerada, el total de sección en cada punto de la pauta adoptada, habida cuenta de cuántos nervios de cada tipo hay en total.

Por último se transforma la sección en capacidad a momento, a través de la clásica expresión $M = S \cdot f \cdot z$, siendo S la sección de acero obtenida, f la tensión segura indicada en el apartado 2, y z el brazo de palanca indicado en el apartado 1.

Lo que se anota en último lugar es el momento flector, pero, para que sean más fácilmente comparables con el resto de comprobaciones, por unidad de ancho de viga, en este caso, $6,20 \text{ m}$.

El conjunto se representa en un alzado a escala, como ley de capacidades resistentes máximas. El valor máximo negativo es de 51 mkN/m, y el positivo del tramo tipo 45 mkN/m.

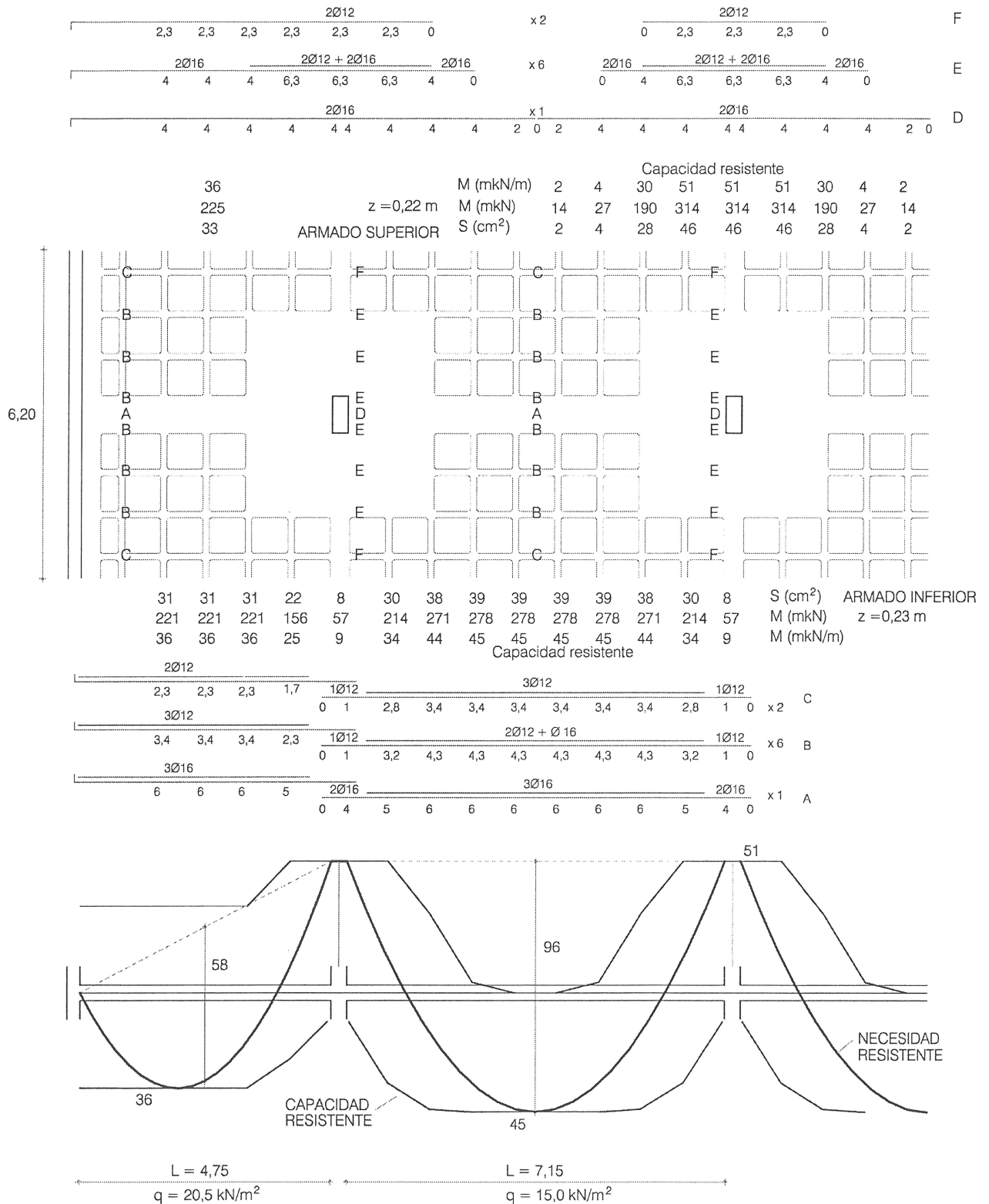


Figura 4. Modelo de viga en dirección X

La operación final consiste en inscribir, en el diagrama obtenido de capacidad resistente, una parábola, que es la forma de la necesidad resistente de una carga uniforme. En el caso del tramo tipo es de cálculo simple. Como la suma de ambas capacidades es $51 + 45 = 96$ mkN/m y eso sucede en una amplitud (distancia entre caras de soportes), de 7,15 m, dado que $q \cdot L^2 / 8 = 96$, se deduce que $q = 15,0$ kN/m².

$q \cdot L^2/8$, resulta ser $q = 20,5 \text{ kN/m}^2$

Esa es la carga que agota la viga considerada (en las condiciones de seguridad supuestas).

Por el trazado de ambas gráficas de capacidad y necesidad (las parábolas obtenidas) se comprueba que en la situación crítica sólo están implicadas tres secciones, como corresponde a la inscripción de la parábola. Se comprueba que las demás secciones están holgadas, lo que podría traducirse en armadura de menor longitud, sin que eso afectara a la capacidad resistente del forjado. A menos que sea necesaria por las comprobaciones que quedan pendientes.

4. Análisis como viga: dirección Y

De manera análoga puede considerarse una viga en la otra dirección, lo que implica las armaduras perpendiculares a las hasta ahora consideradas. Y podría dar lugar a otro valor de carga. Si resultara menor, eso significa que en el proceso de carga, se agotará en esa dirección independientemente de que en la otra aún sobrara capacidad. El resultado que se busca, la capacidad del forjado, es pues el menor valor de entre los que se obtengan de todas las comprobaciones que se hagan.

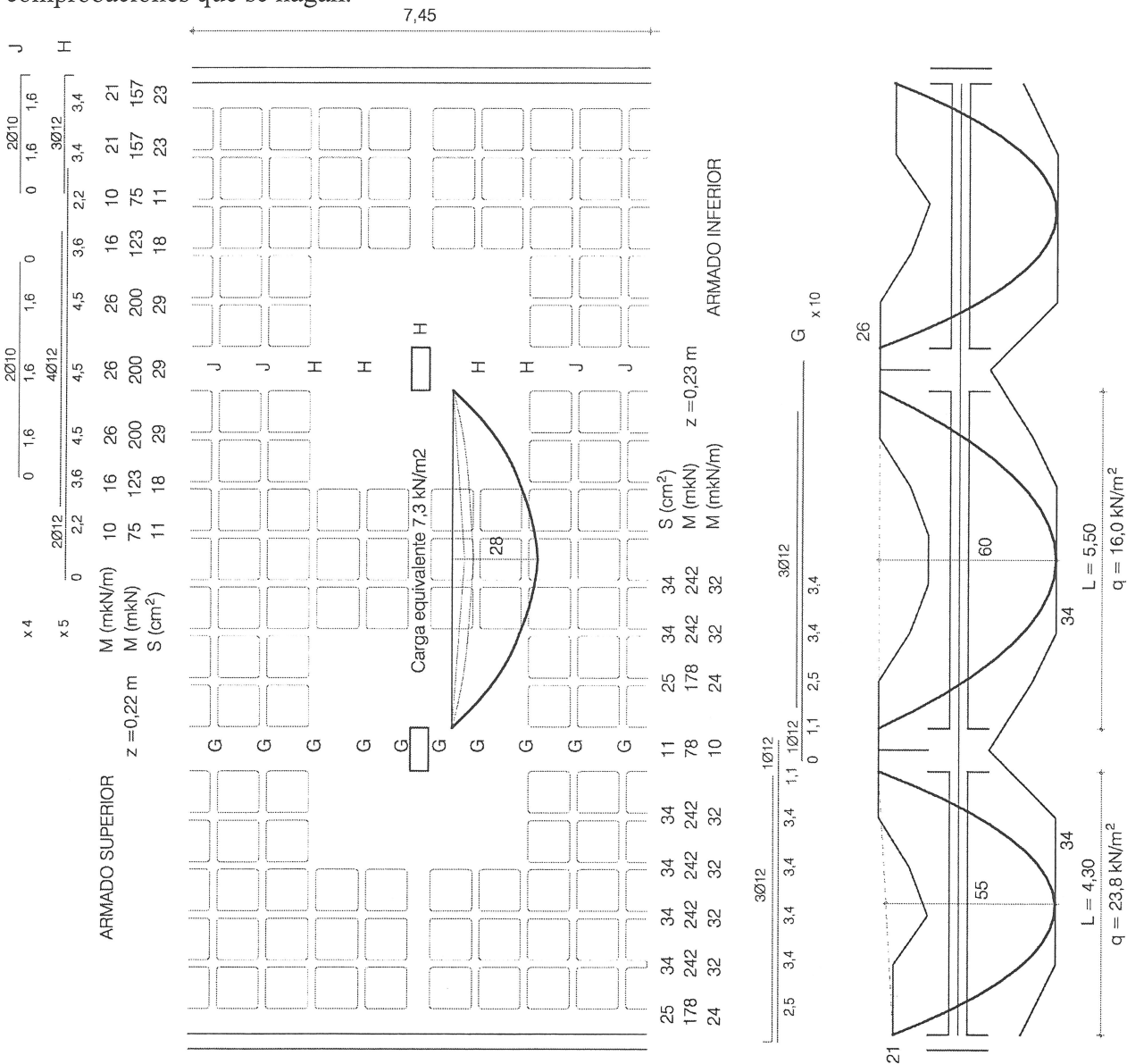


Figura 5. Modelo de viga en dirección Y

Como viga en dirección Y, se toma la del paño tipo, de 7,45 m de ancho, a ambos lados de una fila de soportes (véase figura 5).

La viga es de tres tramos, sustentándose los extremos en muros. Se repite el proceso. Se identifican los tipos de armadura, en este caso la inferior es la misma en todos los nervios, G. En la cara superior hay dos tipos H y J. Se anota la sección eficaz de cada tipo en la intersección de cada nervio transversal (teniendo en cuenta la reducción en los extremos por anclaje), y el total de entre todos ellos en esos puntos. Posteriormente se traduce la sección a momento resistente, con la expresión $M = S \cdot f \cdot z$, y por último se obtiene el momento por unidad de ancho, dividiendo el anterior por 7,45 m.

Por procedimiento numérico o gráfico, se identifica, en cada tramo de la viga, qué carga uniforme sería soportable, correspondiente a la parábola inscrita en el diagrama de capacidades obtenido. Para los extremos se obtiene $q = 23,8 \text{ kN/m}^2$ y para el central $q = 16,0 \text{ kN/m}^2$.

5. Corrección por losa

Por ahora el valor más bajo es el de la viga en dirección X, con el que se obtenía 15 kN/m^2 , pero recordemos que era pesimista, porque la viga planteada no era fielmente representativa de situación real, en la que intervendría el muro.

La figura 6 ilustra esta cuestión. A la izquierda aparece la planta. Puesto que las secciones críticas eran las situadas a caras de soportes y al centro del tramo (tipo), el cálculo de la viga X se hizo tomando como frontera las líneas señaladas. Y en efecto, sobre esa viga habría otra igual, por lo que a través de la frontera que las separa no hay interacción.

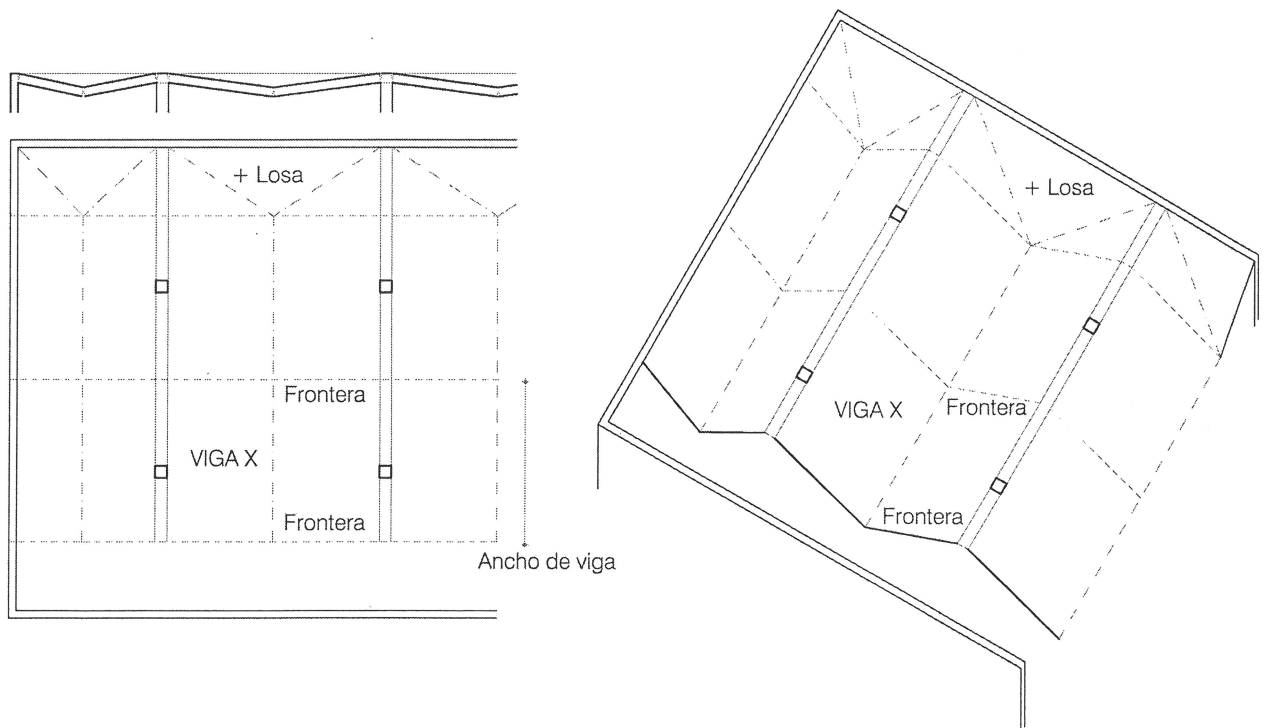


Figura 6. Corrección por losa

Pero en la parte superior de la figura, para mantener la forma de la rotura de la viga, habría que disponer un trozo con una configuración plegada en las dos direcciones al tiempo, que calificaremos de “losa”. Analizando esa losa, como si a través de la frontera no hubiera interacción, se llegaría a otro valor de carga. Si fuera notoriamente mayor que el de la viga, eso significaría que el fracaso del conjunto se produciría con un valor intermedio, y por tanto mayor que el obtenido para la viga.

O que la frontera no se había elegido bien. La verdadera frontera debe ser aquella con la que cada uno de los trozos tiene la misma carga de agotamiento.

Si la losa de la figura tuviera, por sí, una capacidad de carga mayor que la de la viga, a través de la frontera supuesta, el trozo que esté llegando antes al agotamiento, tirará del otro, en condiciones todavía holgadas, y por tanto la capacidad obtenida estará falseada a la baja.

Pero el cómputo de la capacidad de carga de las losas, por su complejidad espacial, exige un aparato de cálculo diferente.

6. Cálculos por trabajo

El método de cálculo del equilibrio de las losas es el de “trabajo”. Se supone que la losa ha alcanzado una situación crítica. En ese instante, las secciones en agotamiento a flexión giran sin esfuerzo. Para que el conjunto signifique un agotamiento de la losa, debe existir un patrón de agotamiento completo, tal que haya la posibilidad de un descenso incontrolado. No bastan unos cuantos puntos en esa situación. Por tanto las secciones agotadas deben tener la configuración de líneas; son las denominadas “líneas de rotura”. Puesto que en ese instante, los demás puntos están en situación elástica, su deformación es, en comparación con la de las líneas, despreciable, de manera que entre líneas deben ser planos, y por tanto las líneas deben ser intersección de planos, o sea, rectas. Si el problema tiene geometría enrevesada, en vez de plantear el equilibrio con la condición de resultante nula, es más sencillo establecer que el trabajo en un movimiento de desequilibrio es nulo.

Lo que se ha hecho con los modelos de viga X e Y puede reinterpretarse en clave de este método. Véase la figura 7. A la izquierda aparece el modelo de viga. El agotamiento se presenta por tres líneas paralelas, dos a caras de soporte y la otra (si la situación es simétrica), al centro. El descenso de la línea central se simboliza con δ . Si hay equilibrio, y la capacidad resistente da de sí para soportar la carga, el trabajo de las líneas debe ser igual al del descenso de la carga. En este caso, cada punto cargado descende una cantidad distinta, desde cero hasta δ , en promedio $\delta/2$. Así que el trabajo total será $q \cdot b \cdot L \cdot \delta/2$. El trabajo de las una línea de rotura es el producto del momento actuante por el giro, o sea el momento total, $m \cdot b \cdot \phi$, y como el giro es $\phi = \delta / 0,5 \cdot L$, se deduce que, eliminado el ancho b , la condición es $q \cdot L \cdot \delta/2 = (2 \cdot m^- + 2 \cdot m^+) \cdot \delta / 0,5 \cdot L$, que da lugar a la conocida $q \cdot L^2/8 = m^- + m^+$, que fue la usada en el apartado 3.

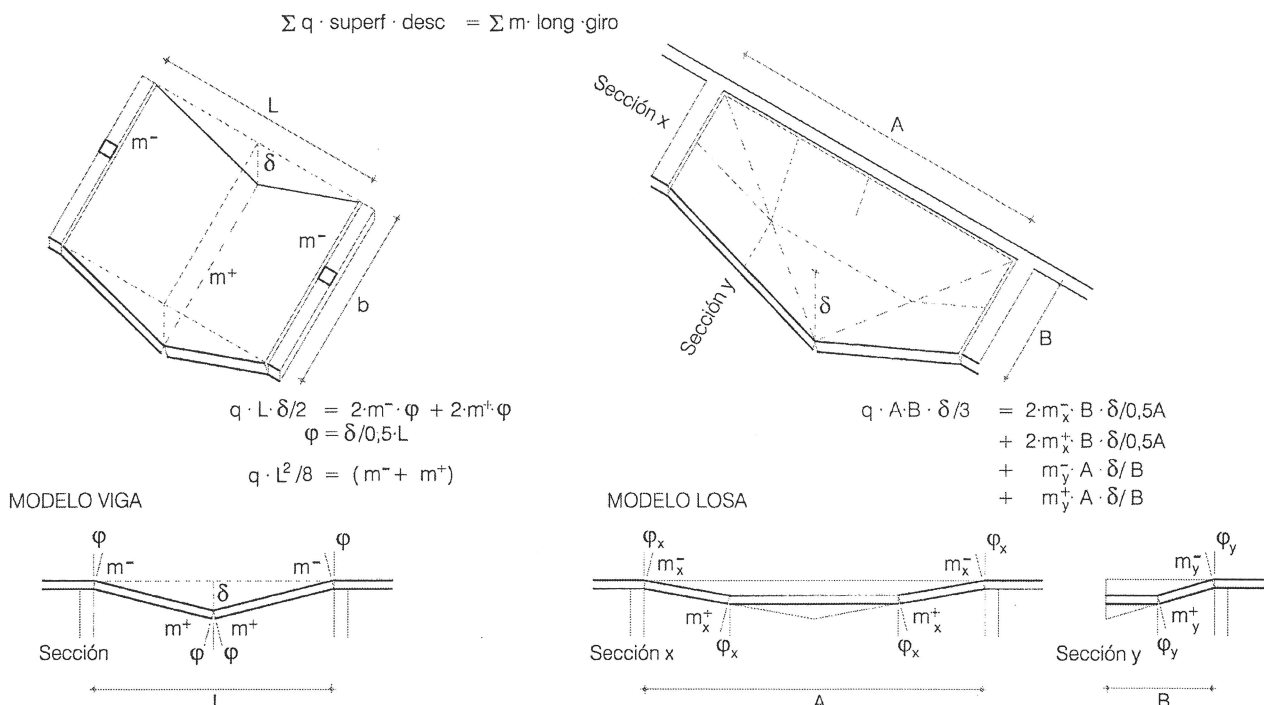


Figura 7. Método de las líneas de rotura

Si se toma el elemento de losa de la figura 6, véase figura 7 a la derecha, y se simboliza con δ el descenso del vértice, la carga desciende asimismo una cantidad variable de cero a δ , pero al tratarse en planta de triángulos, el descenso promedio es $\delta/3$, por lo que el total es $q \cdot A \cdot B \cdot \delta/3$. El trabajo de cada una de las líneas negativas cortas es, momento por giro, $m_x^- \cdot B \cdot \delta/0,5 \cdot A$. El de la larga es $m_y^- \cdot A \cdot \delta/B$.

El trabajo de las líneas positivas, diagonales, es algo más complejo de establecer. Dicha línea es atravesada, en la dirección x , por armaduras que se quebrantan, véase sección, un ángulo $\phi_x = \delta/0,5 \cdot A$. El número de armaduras que hacen eso es el correspondiente al desarrollo B . El trabajo es pues $m_x^+ \cdot B \cdot \delta/0,5 \cdot A$. Pero además, en dirección y , esa línea es atravesada por armaduras que se quebrantan un ángulo $\phi_y = \delta/0,5 \cdot B$, que en número son las que hay en la longitud A , lo que conduce a un trabajo $m_y^+ \cdot A \cdot \delta/B$. El proceso se conoce como “reducción al contorno” ya que, ambas componentes, desarrollo de la línea y giro, se miden en proyección. Y la diagonal tiene dos.

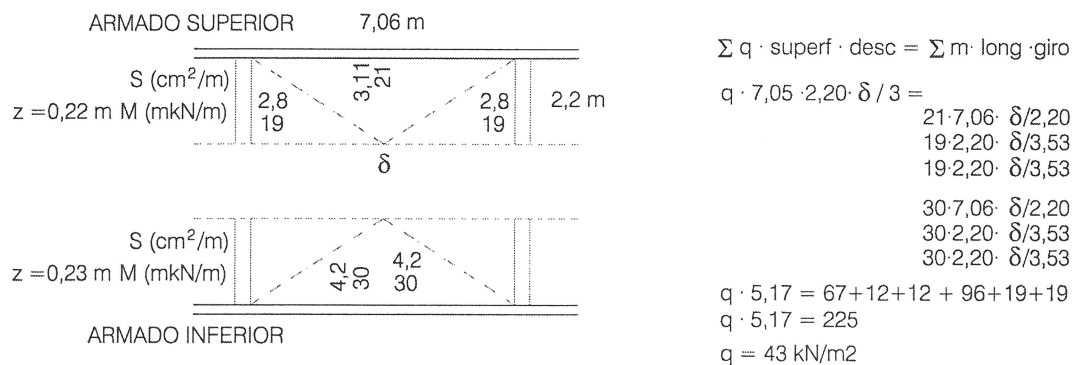


Figura 8. Cálculo de losa en extremo de viga

Lo que se hizo en los apartados 3 y 4, por equilibrio clásico, es, de un golpe, la comprobación de todas las combinaciones simétricas, y asimétricas, de planos con líneas de agotamiento en cualquier posición, que, por trabajo, exigiría un número considerable de cálculos independientes. Para agotamiento en viga ese sistema es más potente. Pero para agotamientos en losa, el cálculo por trabajo es mucho más simple y sistemático.

Si el proceso se aplica al caso que nos ocupa, los cálculos aparecen en la figura 8. En cada línea se anota la sección de armaduras, esta vez por m de desarrollo, y el momento que son capaces de soportar, asimismo por m de ancho. Los cálculos, usando la expresión de trabajo:

$$\Sigma \text{carga} \cdot \text{superficie} \cdot \text{descenso} = \Sigma \text{momento} \cdot \text{desarrollo} \cdot \text{giro}$$

permiten obtener que la carga que es capaz de soportar es de 43 kN/m². Se confirma pues que el resultado del análisis de viga X era pesimista; el resultado correcto debe estar entre los 15 kN/m² obtenidos entonces y los 43 kN/m² de ahora. Lo enorme de la diferencia obliga a obtener el valor correcto a través de configuraciones de agotamiento que cubran el forjado de lado a lado de tipo losa, es decir, espaciales.

7. Análisis por losa

La búsqueda de la capacidad portante implica considerar *todas* las posibles configuraciones de agotamiento. Por lo dicho, la carga que se busca es la mínima. Cuando se llegue a ese valor, se producirá el agotamiento, y descenso incontrolado de la losa, independientemente de que para otras configuraciones esté holgada. La losa, para fallar, buscará la mínima. El problema es encontrarla¹.

¹ En teoría, el mínimo absoluto es inalcanzable, ya que se puede producir con una configuración plagada de detalles locales. Pero en general hay una configuración sencilla que se aproxima mucho, y que para efectos prácticos es suficiente.

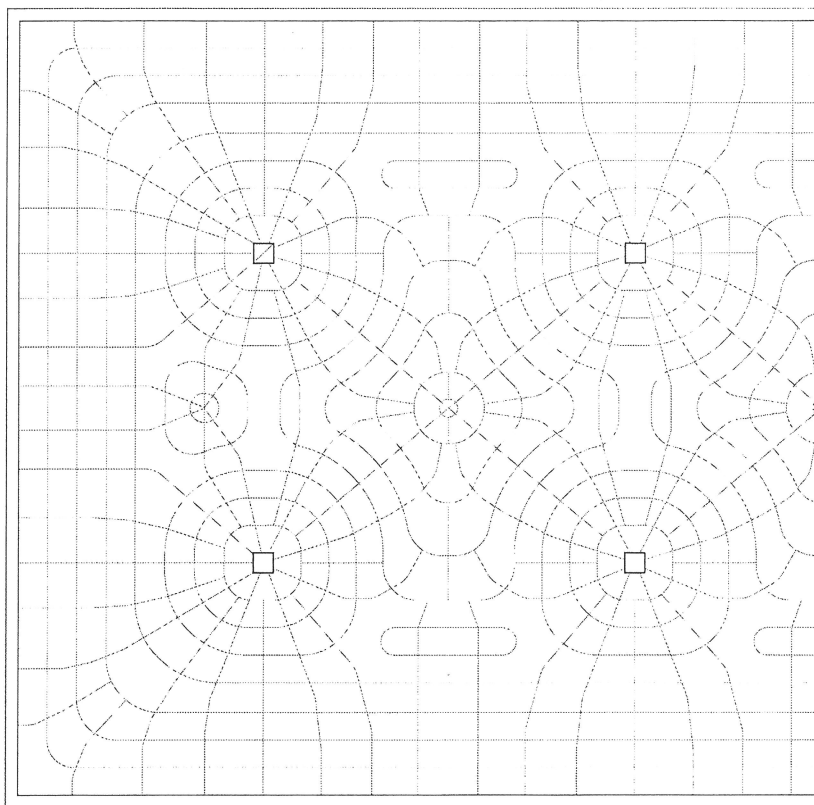


Figura 9. Patrón de configuraciones

Lo que se usa, para proceder a una exploración sistemática de la forma pésima, es partir de un *patrón* de configuraciones probables, que contenga, de un golpe todas las candidatas con posibilidades de serlo. La figura 9, presenta el de este caso.

El planteamiento para trazar el patrón es simple. Si las líneas de agotamiento son las de momentos máximos, serían como las de nivel de la deformación. La familia perpendicular, sería como las de pendiente. Si se trazan líneas en derredor de los puntos de descenso nulo, tales como en este caso soportes, y muros, a distancias arbitrarias, hasta colmatar la planta, y posteriormente las perpendiculares, esa figura puede tomarse como *patrón*.

Las configuraciones para una consideración sistemática de posibilidades de agotamiento son subconjuntos regularizados de este patrón. Conviene tomar las más simples. Nótese que las que puedan ser combinaciones complejas de otras más simples, romperán para una carga intermedia entre las que corresponden a las simples, y por tanto nunca permitirán localizar el mínimo. Puede comprobarse que tomando, en ambas direcciones, las líneas de soporte y a medias entre ellos, se obtienen las configuraciones ya usadas en el análisis como vigas en apartados 3 y 4.

8. Modelo de conos

El modelo por excelencia de losa sustentada en soportes es el de conos. En el patrón de la figura 9 puede reconocerse cómo, alrededor de los soportes se dibujan como las curvas de nivel de esas figuras.

En una planta más extensa, y si sólo hubiera soportes (sin muros), la configuración podrá ser de sólo conos. Para el cálculo de la capacidad de carga, puede analizarse sólo uno, con tal de tomar, alrededor, un área tributaria, a través de fronteras, como antes se hizo con el análisis por vigas. Como se dedujo antes, si se toma el conjunto de varios, el valor de carga de hundimiento es necesariamente intermedia entre los de cada uno, por lo que con ese sistema nunca se obtendría el mínimo. Pero si se toma uno a uno, la frontera es arbitraria, y, en sentido contrario, debe probarse con varias posiciones de esas fronteras, hasta que los valores de la carga en torno a cada soporte sean iguales.

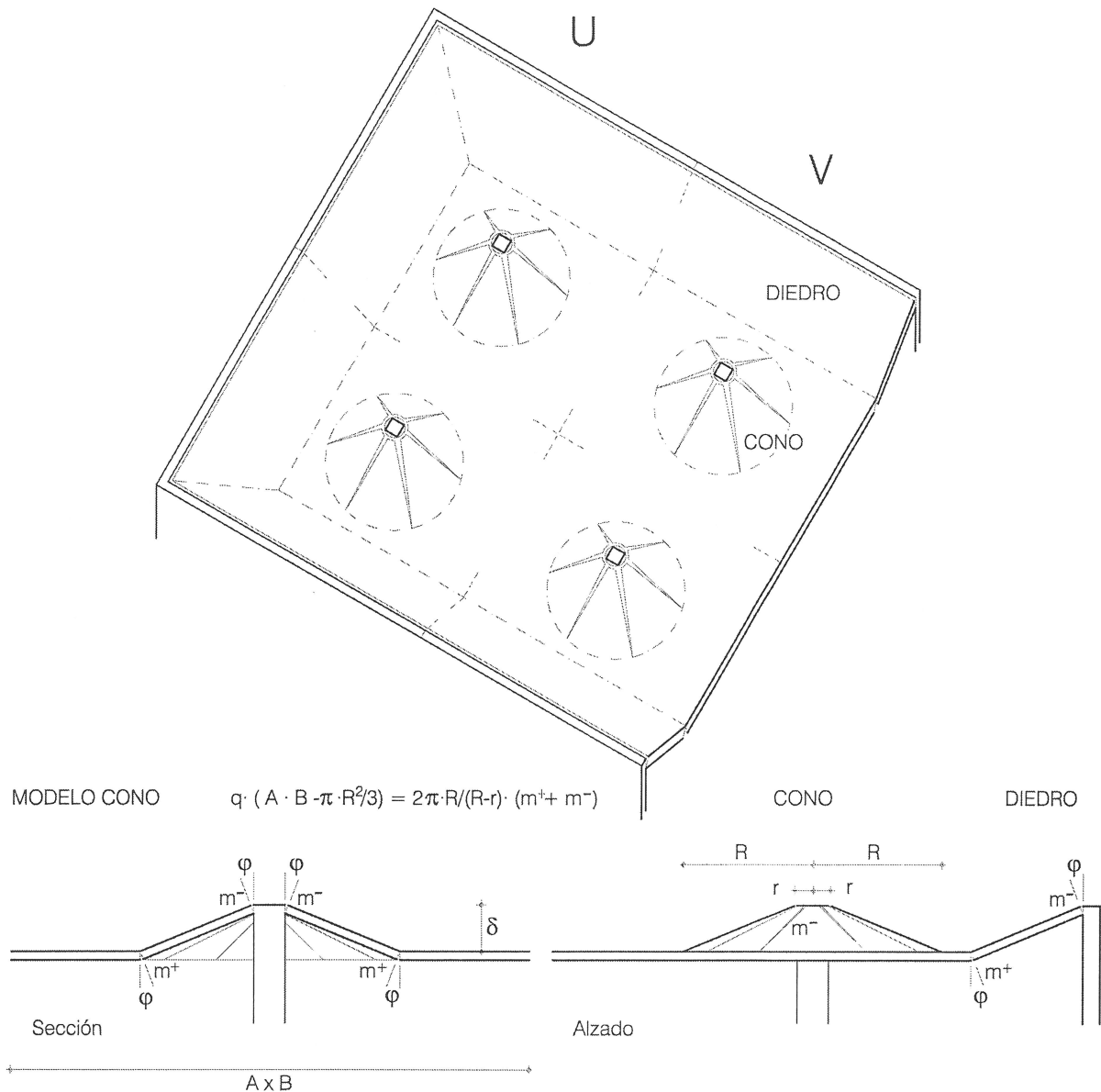


Figura 10. Agotamiento en cono

La formulación en el caso de conos es simple (véase figura 10). La carga produce un trabajo que es el de toda el área tributaria, descendiendo δ , menos lo que representa el volumen del cono, $q \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \delta/3$. El de la línea circular, a momento positivo, sería $2 \cdot \pi \cdot R \cdot m^+ \cdot \delta/R$. El de los radios, a momento negativo, por reducción al contorno sería similar: $2 \cdot \pi \cdot R \cdot m^- \cdot \delta/R$.

Dos precisiones. Con la formulación anterior, el cono crítico, el que demanda más capacidad a momento, sería el de radio nulo. Pero eso es físicamente imposible. El soporte tiene un tamaño finito. Y en ese caso, en las expresiones del trabajo de los momentos, aunque el perímetro es $2 \cdot \pi \cdot R$, el giro es $\delta/(R-r)$ siendo r el del soporte. Más que conos debería hablarse de troncos de cono. En ese caso se invierte la tendencia, y con radio $R=r$ la capacidad es infinita. Con radios infinitamente grandes también lo sería, y el mínimo, muy tendido, se sitúa en torno al 20% o 30% de la dimensión del lado del área tributaria.

Una segunda precisión atañe al valor de m , sobre todo porque puede ser variable de unas direcciones a otras y de unos puntos a otros del cono. De acuerdo con la deducción, m^+ es el promedio de la capacidad en el *perímetro* de la circunferencia base del cono adoptado. Si la armadura es la misma en ambas direcciones, para el cono es como si fuera constante en el perímetro.

En cambio el valor de m^- corresponde al promedio de la capacidad en la *superficie* del círculo del cono. Si a una distancia dada, es igual en ambas direcciones, puede computarse como si lo fuera en toda la línea a esa distancia.

Si, como en este caso, hay muros, y como se percibe en el patrón de la figura 9, la configuración de agotamiento en conos debe complementarse con diedros que rotan en la línea de muro. Como siempre, si se quiere considerar cono, con su superficie tributaria por un lado, y cono por otro, la frontera debe ser tal que el valor de carga sea igual en ambos casos.

Pero sea como sea, deben probarse todas las posibilidades de conos, variando el radio, con diedros, variando la pendiente, hasta obtener la que conduzca a valor mínimo.

9. Capacidad por conos

En el caso que se comprueba, para evitar complicaciones innecesarias¹, se adopta convencionalmente un soporte de sección cuadrada, ligeramente superior al lado menor del soporte real, pero muy inferior al máximo. Con ello se parte de un radio $r = 0,30$ m.

Según muestra la figura 11, se prueba con una horquilla de valores de radio de 0,80 m, 1,30 m, 1,80 m y 2,30 m, de manera que cubran el rango posible.

En cada uno se identifica, según el armado existente (figura 3), cuál es la densidad de armadura en cada dirección y cara. La superior es pasante sobre el cono, y se ancla en los extremos. A la inferior le sucede lo contrario, y es en las distancias cortas, donde hay que suponer una menor sección eficaz por anclaje.

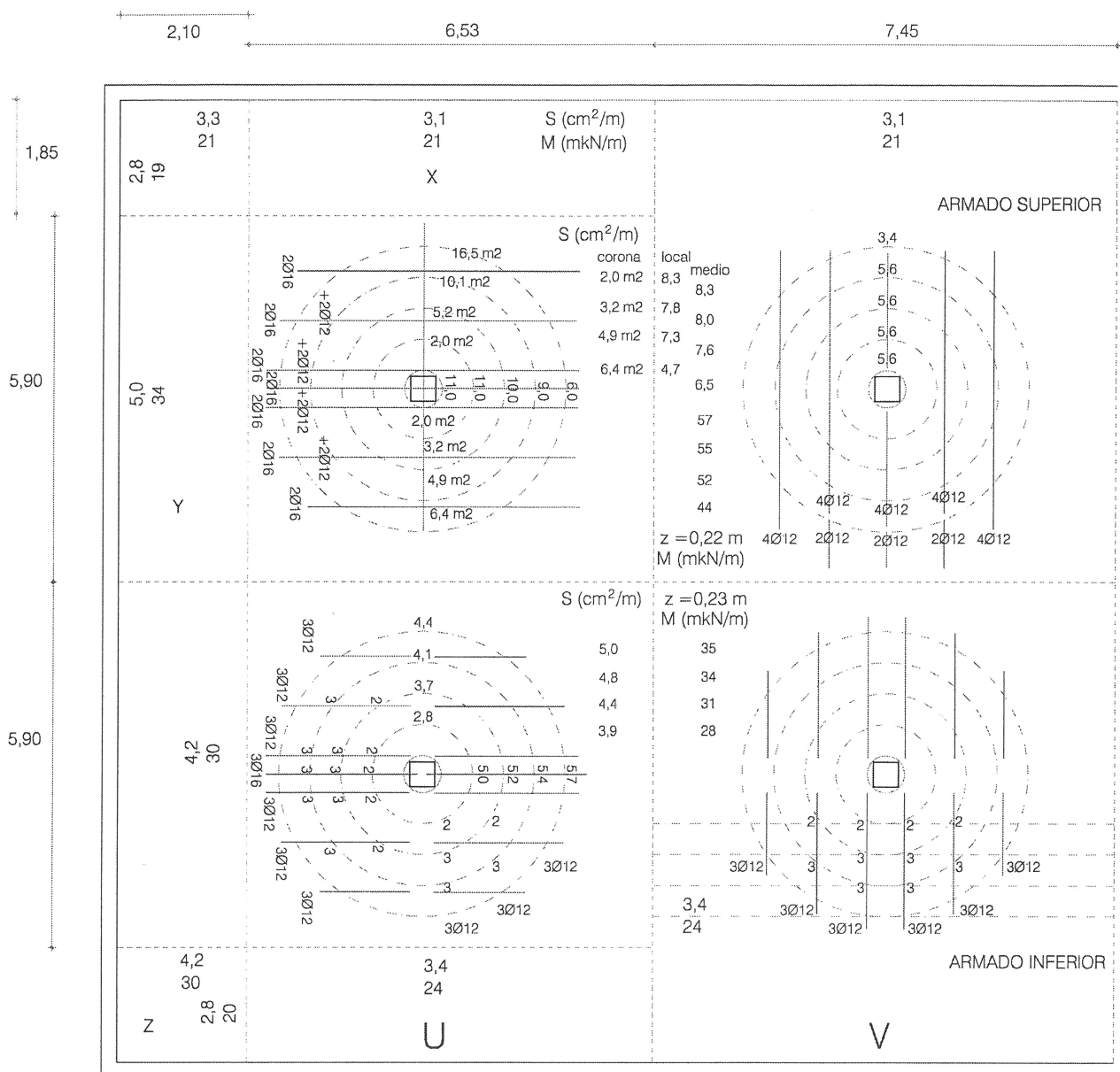
En la superior, tras anotar la que hay en cada cono, o corona, se anota finalmente el promedio en la superficie interior a cada cono. Puede comprobarse que, aunque la sección localmente baja muy rápidamente, el promedio en la superficie se mantiene en un valor más uniforme.

Tras anotar la sección en cada dirección y en tanto que no son muy diferentes de una dirección a otra, se anota el promedio, deduciendo con la expresión $M = S \cdot f \cdot z$, la capacidad a momento.

Por último, aplicando la expresión de equilibrio, $q \cdot (A \cdot B - \pi \cdot R^2/3) = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot (R - r) \cdot (m^- + m^+)$, se deduce la carga que produce la rotura.

Para los soportes cercanos al testero (zona U) se ha comprobado conos (de varios radios) y diedros por separado, adoptando una frontera de conveniencia, el eje de simetría, y a mitad de distancia de los soportes sucesivos. Los valores de conos oscilan desde $q = 17$ kN/m² a 22 kN/m², mientras que los de los diedros se mueven desde $q = 26$ kN/m² a 34 kN/m², lo que indica que los valores de agotamiento conjunto serían intermedios, en todo caso no críticos. Como sucedía en el análisis como viga, el módulo extremo parece estar sobredimensionado.

¹ Partiendo de la forma real del soporte, si es muy alargado, los conos de radio muy pequeño deberían ser pirámides, y aun a cierta distancia deberían manejarse como conos de base elíptica. En la práctica, dado que lo que se busca es una cualidad integral, no hay pérdida de precisión es regularizar esa forma a la más sencilla. Nótese que tomando un círculo aparece $2 \cdot \pi = 6,3$ pero aun si se adoptaran formas tan toscas como pirámides cuadradas ese factor sólo cambiaría a 8. Otras formas intermedias, como exágonos u octógonos se regirían por valores intermedios.



CONO $q \cdot (A \cdot B - \pi \cdot R^2/3) = 2 \cdot \pi R / (R-r) \cdot (m+ + m-)$

R= 2,3 m $q \cdot (6,53 \cdot 5,90 - \pi \cdot 2,3^2/3) = 2 \cdot \pi \cdot 2,3/2,0 \cdot (35+44)$
 $q \cdot 33 = 7,2 \cdot 79$ $q = 17,2$

R= 1,8 m $q \cdot (6,53 \cdot 5,90 - \pi \cdot 1,8^2/3) = 2 \cdot \pi \cdot 1,8/1,5 \cdot (34+52)$
 $q \cdot 35 = 7,5 \cdot 86$ $q = 18,4$

R= 1,3 m $q \cdot (6,53 \cdot 5,90 - \pi \cdot 1,3^2/3) = 2 \cdot \pi \cdot 1,3/1,0 \cdot (31+55)$
 $q \cdot 36 = 8,2 \cdot 86$ $q = 19,6$

R= 0,8 m $q \cdot (6,53 \cdot 5,90 - \pi \cdot 0,8^2/3) = 2 \cdot \pi \cdot 0,8/0,5 \cdot (28+57)$
 $q \cdot 38 = 10 \cdot 85$ $q = 22,3$

DIEDRO X $q \cdot L^2/2 = m+ + m-$ $q \cdot 1,85^2/2 = 21+24$ $q = 26$

DIEDRO Y $q \cdot L^2/2 = m+ + m-$ $q \cdot 2,10^2/2 = 34+30$ $q = 29$

DIEDRO Z $q \cdot L^2/3 = m+ + m-$ $q \cdot 1,98^2/3 = 20+25$ $q = 34$

CONO + DIEDRO

$q \cdot (40,2 - \pi \cdot 2,3^2/3) = 2 \cdot \pi \cdot 2,3/2,0 \cdot (35+44)$
 $+ q \cdot 17,1/2 + 7,45 \cdot (21+24) / 2,35$
 $q \cdot (34,6+8,6) = 7,2 \cdot 79 + 3,2 \cdot 45$ $q = 16,5$

$q \cdot (36,5 - \pi \cdot 1,8^2/3) = 2 \cdot \pi \cdot 1,8/1,5 \cdot (34+52)$
 $+ q \cdot 21,2/2 + 7,45 \cdot (21+24) / 2,85$
 $q \cdot (33,1+10,6) = 7,5 \cdot 86 + 2,6 \cdot 45$ $q = 17,4$

$q \cdot (32,8 - \pi \cdot 1,3^2/3) = 2 \cdot \pi \cdot 1,3/1,0 \cdot (31+55)$
 $+ q \cdot 25,0/2 + 7,45 \cdot (21+20) / 3,35$
 $q \cdot (31,0+12,5) = 8,2 \cdot 86 + 2,2 \cdot 41$ $q = 18,2$

$q \cdot (29,0 - \pi \cdot 0,8^2/3) = 2 \cdot \pi \cdot 0,8/0,5 \cdot (28+57)$
 $+ q \cdot 28,6/2 + 7,45 \cdot (21+16) / 3,85$
 $q \cdot (28,3+14,3) = 10,0 \cdot 85 + 1,9 \cdot 37$ $q = 21,6$

Figura 11. Pruebas de agotamiento en conos

Para los soportes tipo (zona V) se ha optado directamente por tratar el conjunto de cono y diedro (para varios radios diferentes). No es complicado deducir que, para un cono dado, el peor diedro es el que se sitúa tangente al mismo. Aunque acercando la base del diedro al cono, el descenso de la carga se reduce algo, el giro mengua más rápidamente.

En este caso la frontera no tiene ambigüedades. Es necesariamente el eje de simetría, y la línea a mitad de soportes. La primera línea de cada cálculo corresponde al cono. La segunda (con +) lo que corresponde por incremento por diedro del primero y segundo términos, lo que permite obtener, según se desee, el valor de cada cosa por separado o del conjunto.

Los resultados oscilan entre $q = 16,5 \text{ kN/m}^2$ y $21,6 \text{ kN/m}^2$. El peor es el de radio máximo. Si bien es cierto que cabría esperar alguna baja con un radio mayor, casi no hay margen para ello, y como resultado de este análisis se toma el de $q = 16,5 \text{ kN/m}^2$, que no es crítico, en tanto la viga en dirección Y (apartado 4) arrojó $q = 16,0 \text{ kN/m}^2$. Dado que todas las configuraciones arrojan valores similares, eso significa que el forjado estaba bastante bien diseñado.

10. Modelos mixtos

Aunque el análisis como viga en dirección Y era concluyente, para el módulo del testero (zona U) debería haberse complementado con un diedro, según se puede ver en la figura 12. Como aun en esa situación, pesimista, ya tenía una capacidad muy superior a la que por ahora parece decantarse como crítica, se abandona ese análisis.

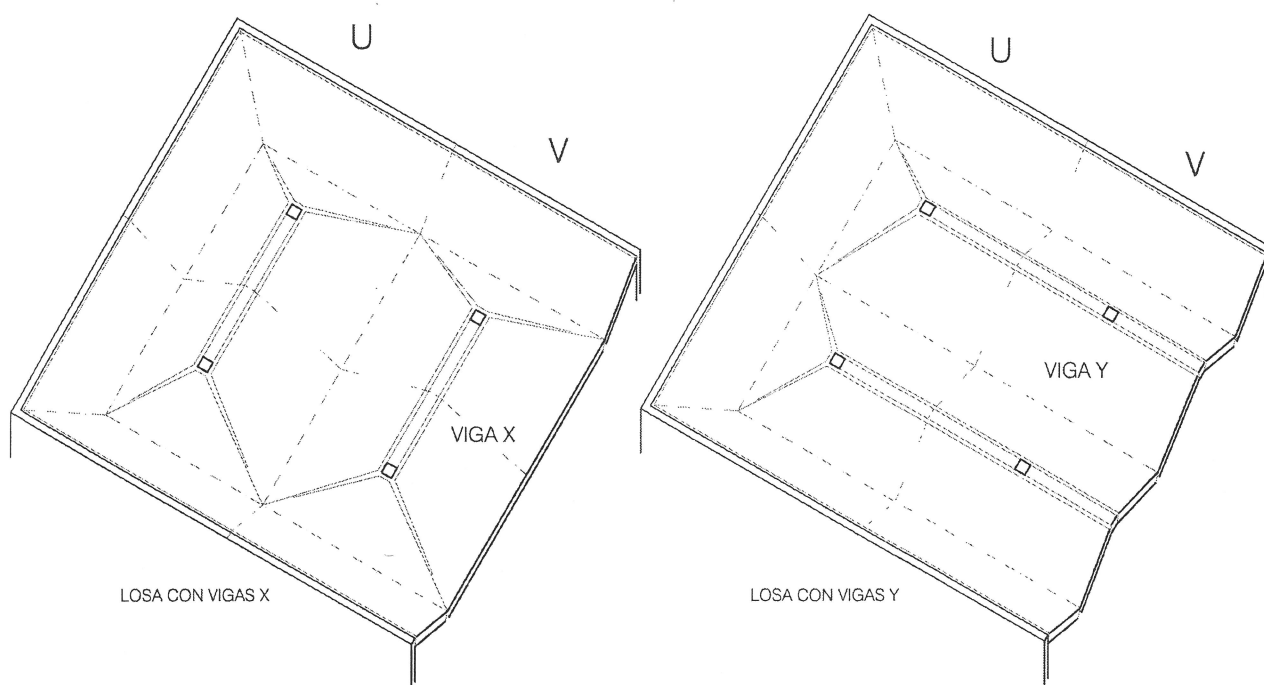


Figura 12. Modelos mixtos de viga y diedro

Sin embargo la viga en dirección X sigue pendiente. Para que se obtenga un resultado concluyente, es preciso, en la línea que sugiere el *patrón*, añadirle un diedro al llegar a cada muro, lo que exige disponer un faldón, quedando más un tejado a cuatro aguas que a dos¹, como se ve en la figura 12.

¹ Cabrían refinamientos, como los de considerar redondeados las uniones entre faldones, a modo de superficies cónicas, pero sólo tendría sentido si se constata que la configuración tiene posibilidades de ser la crítica.

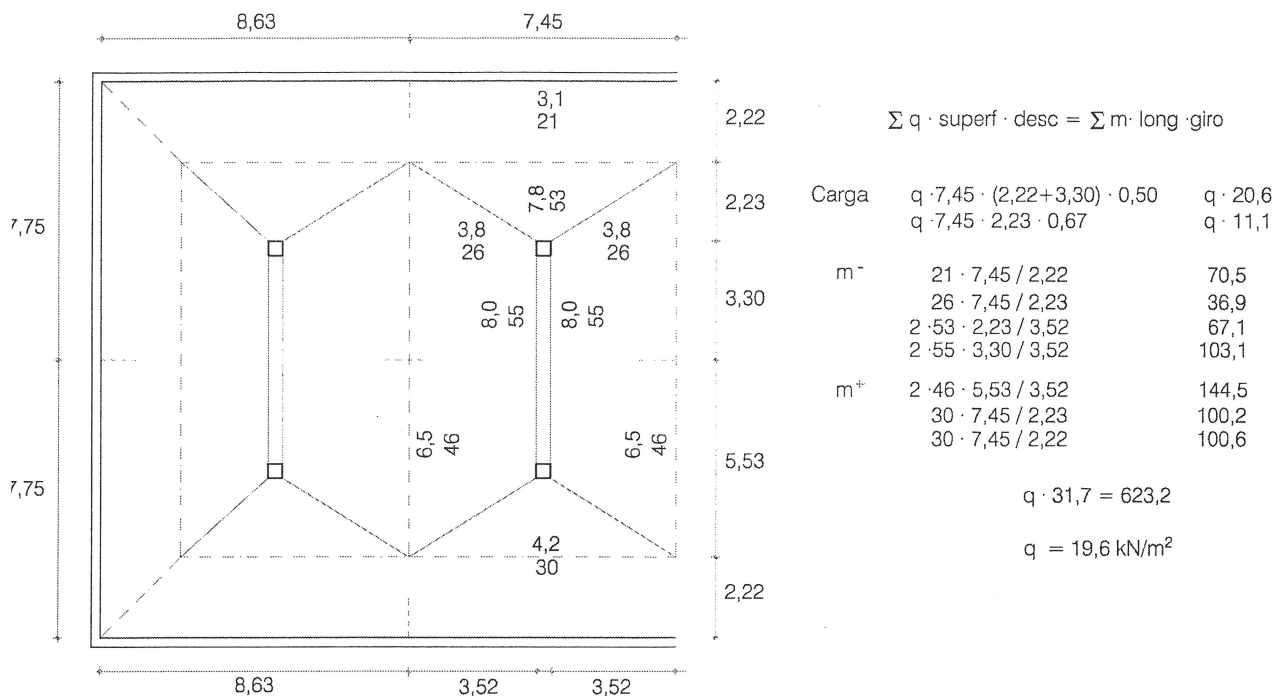


Figura 13. Análisis de viga X con diedro

El cálculo de esta configuración es simple, y aparece en la figura 13. Para una primera aproximación, las líneas de agotamiento por momento positivo se disponen a mitad de distancia entre puntos sin descenso, soportes y muros. Como en casos anteriores, se anota, en cada línea de rotura, la sección eficaz en cm²/m, y el momento, en mkN/m que puede soportar.

Con la expresión de equilibrio por trabajo del apartado 6, se obtiene, para el módulo tipo, que la carga de agotamiento es $q = 19,6 \text{ kN/m}^2$. En efecto es intermedia entre los 15 kN/m^2 como viga a secas del apartado 3, y los 43 kN/m^2 del complemento de losa, obtenidos en el apartado 6. En cualquier caso no es un valor crítico, por lo que se prescinde de intentar sacarle punta.

11. Modelo de cono de vano

En el agotamiento por viga cuenta la totalidad de armadura que haya en las secciones críticas, a ras de soportes y centro de vano, pero en una sola dirección. Aunque la armadura pueda no tener distribución constante de lado a lado de la luz, es muy raro, para la manera habitual de armar, que sea una rotura diferente de la total, a mitad de vano, la que resulte crítica. Pero si, confiando en el diagrama de momentos, la inferior se corta muy pronto, sin superar nada o casi nada la línea teórica de momento nulo, y hubiera un desajuste entre esa posición y el valor de la capacidad a momento de cada signo, cabría que sucediera que la rotura por dos líneas de vano alejadas del centro, donde hubiera poca armadura inferior, resultara crítica. No parece ser el caso.

El agotamiento en conos sobre soportes opera de manera diferente. Ahora cuenta la armadura que hay en las dos direcciones, pero sólo la que hay en las proximidades de los soportes. Si la rotura en viga obliga a una cantidad de armadura total, la de conos condiciona el grado de concentración de armadura¹, sobre todo de la superior².

¹ De ahí que, dada la dificultad que entraña el análisis de losas, la norma de hormigón haya optado por dejar que el usuario disponga el total de armadura que pida la carga y luz (con modelo viga), pero forzando un grado de concentración tal que cubra la comprobación de conos, sin tenerla en cuenta expresamente.

² Como la superior que cuenta es la que hay en el círculo interior al cono, esta armadura saca más partido de la concentración que la inferior, que sólo cuenta en la circunferencia. La armadura que se concentre sobre los soportes cuenta en todos los conos.

Pero cabría, en algún caso, que si la armadura superior se corta demasiado cerca de los soportes, o se dispone demasiado concentrada sobre ellos, que el vano quede desprotegido. Cabe pues considerar, como una alternativa de agotamiento, la de cono de vano. Es, en losas, el equivalente de la comprobación local de armadura inferior de vigas.

En este caso esta comprobación aparece asimismo insinuada en el patrón. Cabe que no tenga porqué ser circular, pero como en casos anteriores, bastará una primera aproximación con una figura simple, para constatar si sería aconsejable un refinamiento posterior.

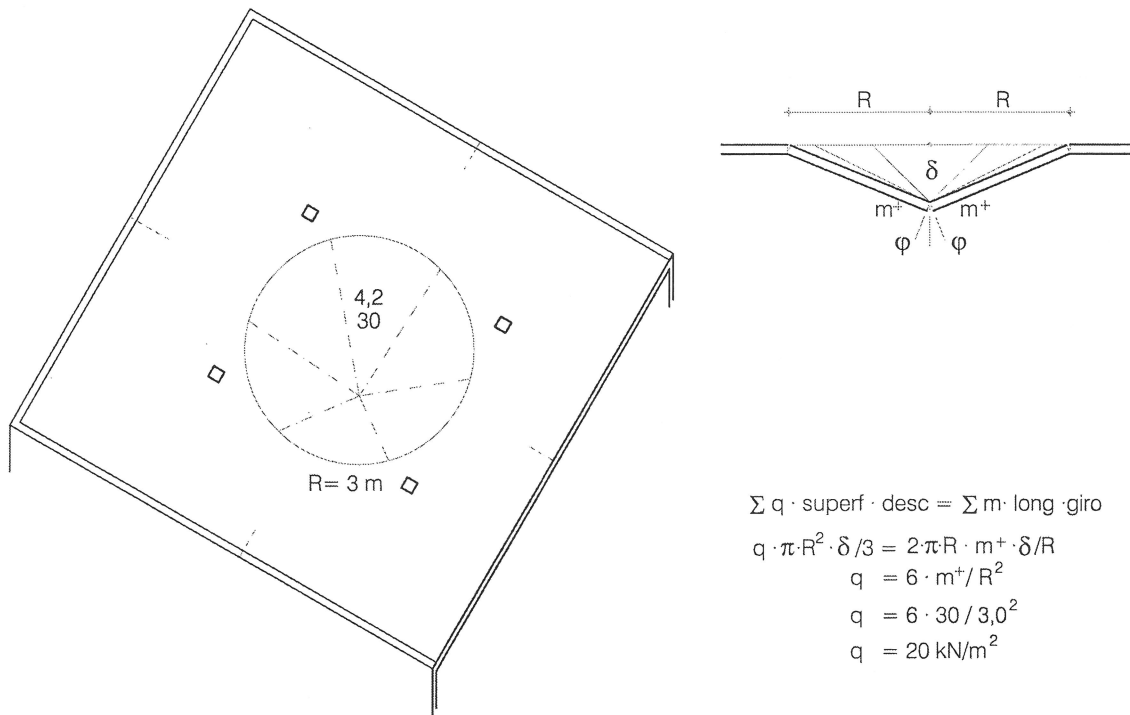


Figura 14. Análisis de cono de vano

La comprobación aparece reflejada en la figura 14. Se considera un cono en el centro de vano, supuestamente no afectado por armaduras superiores. Denominado δ al descenso del centro, descomponiendo el cono en facetas triangulares, el descenso promedio de cada faceta, y por tanto de la totalidad de la carga¹ es $\delta/3$.

Si el cono sólo interesa armadura inferior, y para simplificar se supone constante e igual en ambas direcciones, el trabajo de las líneas, por reducción al contorno, es $2 \cdot \pi \cdot R \cdot m \cdot \delta/R$.

Igualando ambos trabajos se llega a $q = 6 \cdot m/R^2$, de donde, para una armadura inferior dada, el cono crítico es el de mayor radio posible.

En este caso, aun interesando algo de armadura superior, el radio del cono no puede pasar de 3 m (y aun el máximo teórico, tocando a los soportes, no supera 3,60 m). Aunque la armadura no es constante en toda la superficie del cono, ni igual en ambas direcciones, al menos hay 3Ø12 cada 0,80 m, lo que se traduce en al menos $4,2 \text{ cm}^2/\text{m}$ con una capacidad de 30 mkN/m. Con ello la expresión anterior lleva a $q = 20 \text{ kN/m}^2$, que, en efecto, no es crítica.

¹ Debido a que las superficies cargadas suelen ser de tipo rectangular o triangular, o descomponerse fácilmente en esas formas, para el descenso promedio suelen bastar coeficientes como 1/2, 1/3 o 2/3.

12. Carga capaz a flexión

Tras los cálculos anteriores se constata que, para las distribuciones de armadura usadas en la práctica, la configuración crítica corresponderá a una de las clásicas y simples¹, vigas o losa en cono, aunque, según sean las condiciones de borde, haya que complementarlas oportunamente con, por ejemplo, diedros.

Por lo hecho, y lo razonado para desestimar otras configuraciones, que no parece que puedan ser críticas, y aunque el método usado no es capaz de llegar al valor buscado con precisión total, y contando con que lo obtenido siempre será un valor del lado imprudente (la carga real de agotamiento puede ser algo inferior, pero nunca superior al menor valor obtenido), se puede concluir que el forjado analizado es capaz de soportar con seguridad normal, una carga total uniforme de 15 kN/m^2 .

13. Tensiones tangenciales

Un inconveniente clásico del método de comprobación por *líneas de rotura* es que no accede al cortante².

Pero no es mayor problema, dado que, incluso como norma general, muchos de los aspectos relativos a tensiones tangenciales se tratan de manera nominal, sin depender de resultados de análisis, por ejemplo, el punzado³.

Por otro lado, tanto cortante como punzado han estado cambiando su formulación en el transcurso de los años, de manera que las conclusiones relativas a una obra construida hace tiempo son difíciles de obtener sin cierto margen de ambigüedad.

En cuanto al cortante, si para el hormigón de la época, H175, se supone, extrapolando las formulaciones de hoy día, una tensión segura a compresión de $0,83 \text{ kN/cm}^2$ y una tensión segura a tensión tangencial (para un canto útil de $0,27 \text{ m}$), de $0,04 \text{ kN/cm}^2$, se obtiene lo siguiente:

A ras de muro (sección A de la figura 15) huelga la comprobación a compresión oblicua, ya que se parte de que el nervio no tiene armadura y esa sería la comprobación crítica.

A un canto del muro, (sección B), la capacidad a cortante teórica sería, por metro, de $100 \times 27 \times 0,04 = 108 \text{ kN}$. Dado que la luz a la frontera de cortante puede estar a unos $1,91 \text{ m}$, la carga capaz sería de $108/1,91 = 56,5 \text{ kN/m}^2$, nada crítica. Considerando que, a partir de la entrada en el macizado, la carga se desparrama con un ángulo moderado, cabe suponer que el ancho eficaz sea de no más de $0,40 \text{ m}$ por intervalo, 50 cm por metro, lo que reduciría la carga de agotamiento por cortante a la mitad, $28,2 \text{ kN/m}^2$, que tampoco es crítica.

A un canto dentro del nervio cabe considerar un ancho de 14 cm , por lo que la capacidad sería de $14 \times 27 \times 0,04 = 15 \text{ kN}$ por intereje, 19 kN/m . Dado que la luz desde el cortante nulo hasta este punto es del orden de $1,42 \text{ m}$, la carga de agotamiento sería de $13,4 \text{ kN/m}^2$. Cabe no obstante argumentar que si el forjado no llevaba armadura transversal es porque con la norma en vigor, la capacidad a cortante era doble que cuando la llevaba, lo que para H175 sería $0,07 \text{ kN/cm}^2$, por lo que la carga capaz sería superior a los 15 kN/m^2 supuestos por flexión.

¹ Si el motivo del peritaje es un error, confusión entre armadura inferior o superior, olvido de una "capa" del dibujo de armaduras u otros procesos patológicos, puede ser más complicado llegar a la conclusión de la carga crítica, aunque una exploración sistemática de diedros de vigas o de radios de cono puede ser en la práctica casi suficiente.

² Ni a la flecha. En la práctica eso se controla a través de una relación de luz a canto y no por cálculo propiamente dicho.

³ En muchos textos escrito como *punzonamiento*.

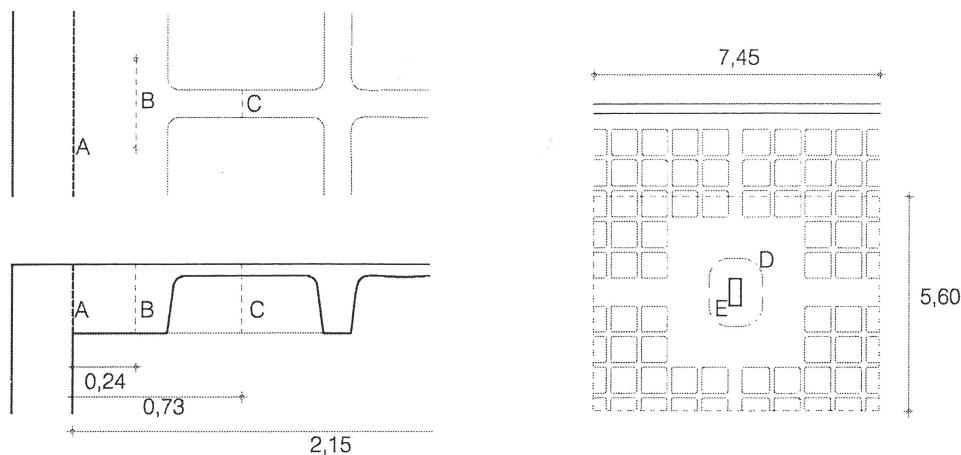


Figura 15. Cortes a cortante y punzado

En cuanto a punzado, a ras de soporte, la sección resistente es de $200 \text{ cm} \times 27 \text{ cm} = 5.400 \text{ cm}^2$, que considerando que la biela acepta con seguridad una compresión de $0,2 \text{ kN/cm}^2$, lleva a una capacidad de 1080 kN . Dado que el área tributaria del soporte es de $41,7 \text{ m}^2$, la carga de agotamiento sería de más de 25 kN/m^2 .

En el perímetro a punzado de la norma actual, a dos cantos del soporte, la sección es de $536 \times 27 = 14.472 \text{ cm}^2$, lo que llevaría a una capacidad de 578 kN , que con un área tributaria de $39,2 \text{ m}^2$, da lugar a una carga de agotamiento de $14,7 \text{ kN/cm}^2$. No obstante, en planos figura un refuerzo a punzado de $4\phi 20$, confirmado en catas, que incrementaría notablemente el resultado, o en el caso de planta alta, con soporte de menor tamaño, (25×40) , lo permitiría mantener.

Con el perímetro de punzado de la norma de entonces, a medio canto del soporte, la sección sería de $308 \times 27 = 8316 \text{ cm}^2$ que con una tensión de $0,07 \text{ kN/cm}^2$ arroja una capacidad de 582 kN , lo que significaría una carga de agotamiento de $14,5 \text{ kN/m}^2$.

En la acometida de los nervios al ábaco, y es de nuevo un problema de cortante, se computan al menos 16 nervios de $0,14 \text{ m}$ de ancho, más dos de $0,37 \text{ m}$ y dos de $0,72 \text{ m}$, en total $4,42 \text{ m}$, que supone una sección de $442 \times 27 = 11.934 \text{ cm}^2$ que suponen una capacidad de 477 kN . Como por fuera del ábaco sólo hay 25 m^2 , la carga de agotamiento por este motivo es de 19 kN/m^2 (aunque, del lado seguro, en planos figuran refuerzos locales en los puntos citados).

14. Conclusión

De los cálculos precedentes se deduce que el forjado analizado es capaz de soportar con seguridad $1,4$ una carga total, uniforme de hasta 15 kN/m^2 .

El resultado está ligado a que el canto del forjado sea de al menos 30 cm . Si fuera inferior, el valor debería reducirse proporcionalmente. Pero sólo si hay amplias zonas con canto diferente, cubriendo lo que en los cálculos precedentes han quedado establecidas como críticas, tendría sentido la corrección.

En Madrid, a 20 de mayo de 2010